TÍTULO

GUÍA PRÁCTICA - PARTE 1

AUTORES

Ing. María Alicia PIÑEIRO

ASIG

MATEMÁTICA SUPERIOR

COD K3AP1

DTO INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN

Centro de Estudiantes de Ingeniería Tecnológica

UTN.BA

BIENVENIDOS A MATEMATICA SUPERIOR

Matemática Superior es una asignatura correspondiente al tercer nivel del plan de estudios 2008 de la Carrera Ingeniería en Sistemas de Información.

La cátedra de Matemática Superior 2016 está conformada por:

- Ing. María Alicia Piñeiro – Profesora Asociada Ordinaria y Coordinadora de Cátedra.
- Ing. María Inés Grand – Profesora Adjunta Ordinaria
- Lic. Luis Alberto Sosa Kasten – Profesor Adjunto Interino
- Ing. Santiago Ferreiros Cabrera – Profesor Adjunto Interino

Y los ayudantes de TP: Jonathan Castro, Uriel Mysler, Ezequiel Macias y Luciano Garófalo.

Contenidos:

La asignatura tiene dos partes bien diferenciadas pero con interrelación entre ellas.

Primera parte: herramientas algebraicas y analíticas muy útiles en la resolución de modelos matemáticos de sistemas dinámicos, más especialmente de sistemas de ecuaciones diferenciales y en diferencias. Los temas son:

- Álgebra de Números Complejos.
- Series y Transformadas de Fourier.
- Transformada de Laplace.
- Función Transferencia y Sistemas Estables.
- Señales discretas y Transformada Z.

Segunda parte: métodos numéricos que nos permiten resolver problemas que no tienen solución analítica o bien es muy complicada. Estos métodos numéricos se llevan a cabo en computadoras o calculadoras limitadas en la representación numérica por ello también debemos estudiar el comportamiento de los errores cometidos.

- Teoría de Error.
- Cálculo numérico de raíces de ecuaciones.
- Resolución numérica de Sistemas de Ecuaciones Lineales.
- Interpolación y aproximación numérica.
- Diferenciación e Integración numérica.
- Resolución numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Modalidad de las clases

Las clases serán **teórico - prácticas**, es decir se verán contenidos teóricos acompañados siempre de ejemplos y de su correspondiente ejercitación. Se pretende que las clases sean dinámicas, con participación de los alumnos haciendo preguntas o aportando ideas.

Forma de evaluación

La evaluación del aprendizaje es un proceso continuo, por lo tanto se tendrá en cuenta la asistencia y participación en clase, la resolución de ejercicios y la predisposición de los alumnos.

Complementariamente, los alumnos deberán aprobar los trabajos prácticos que se les pidan a lo largo del cuatrimestre y dos exámenes parciales:

1er parcial: abarca la primera parte de la asignatura

2do parcial: abarca los métodos numéricos

Recuperatorios: En caso de no aprobar alguno de los parciales, se podrá recuperar hasta dos veces cada uno en las fechas que estipule la cátedra, siempre que se haya rendido el parcial correspondiente o bien se tenga justificativo valedero.

La aprobación de la materia se completa con el Examen Final.

IMPORTANTE: muchas veces por diversos motivos, algunos ajenos a los docentes como por ejemplo suspensión de clases por desinfección, votación, etc. , en muchos cursos no se llega a dar el último tema (Resolución numérica de E.D.O.s) completo en detalle como para poder evaluarlo en el segundo parcial. En esos casos, el parcial solamente constará de ejercicios de las restantes unidades, pero en los exámenes Finales, dicho tema es requisito necesario para aprobar.

Tanto los parciales como los finales podrán constar de ejercicios teóricos y ejercicios prácticos, en algunos casos a desarrollar y a veces con la modalidad completar la respuesta o respuesta correcta. Los alumnos deben presentarse habiendo estudiado la totalidad de los temas.

Materiales de estudio:

Además de la bibliografía recomendada, existen guías tanto teóricas como prácticas de la asignatura, de cada una de ellas hay dos partes, cada una correspondiente a una mitad de la materia.

Guías de Trabajos Prácticos:	Guías de referencia teóricas:
Primera Parte **(esta guía)**	Guía Teórica (1° parte)
Segunda Parte	Guía Teórica (2° parte)

Las guías se deberán traer todas las clases y completar en casa todas las semanas. También hay guías optativas de exámenes resueltos de años anteriores.

Objetivo de esta guía:

La presente es la primera parte de la GUIA de EJERCICIOS cuya finalidad es presentar a los alumnos ejercicios típicos de cada tema para que los tomen de referencia y ejerciten su práctica. En esta guía han sido incorporados ejercicios tomados en exámenes, ya sea parciales o finales, es decir que la complejidad de los mismos es similar a la de las instancias de evaluación.

Otros materiales:

Es imprescindible concurrir a clase con **calculadora**, de ser posible graficadora y programable. (El que lo desee podrá traer una notebook). Además traer tabla de integrales y por supuesto una carpeta o anotador de hojas cuadriculadas para hacer ejercicios o tomar apuntes, regla y lapiceras.

Bibliografía:

Para la primera parte de la asignatura recomendamos consultar la siguiente bibliografía:

- "TRANSFORMADAS DE LAPLACE Y FOURIER", Marcelo O. Sproviero. Editorial NUEVA LIBRERÍA. Edición 2005
- "SERIES DE FOURIER. Sucesiones y Series", Marcelo O. Sproviero. Editorial NUEVA LIBRERÍA. Edición 2003
- "VARIABLE COMPLEJA", Murray R. Spiegel, 1991, Serie Shaum. Mc. Graw Hill.
- "ANÁLISIS DE FOURIER", Murray R. Spiegel, 1991, Serie Shaum. Mc. Graw Hill.
- "TRANSFORMADAS DE LAPLACE", Murray R. Spiegel, 1991, Serie Shaum.Mc. Graw Hill.
- "SEÑALES Y SISTEMAS" ,Oppenheim y Willky , 1998, Prentice Hall.

Contenidos previos:

Para poder comprender esta asignatura y aprovecharla bien, es imprescindible saber trabajar con vectores, identificar cónicas y graficarlas, calcular límites, derivadas e integrales, hallar máximos y mínimos de funciones, y por supuesto nociones de lógica proposicional y de teoría de conjuntos. Todos esos temas vistos en asignaturas ya aprobadas o por lo menos regularizadas. Por ello, les proponemos a los alumnos realicen la siguiente evaluación diagnóstica, para controlar su nivel de conocimientos previos, y detectar qué temas necesitan repasar.

AUTOEVALUACIÓN DIAGNÓSTICA:

1) Indique si el siguiente razonamiento es válido o no y justifique:

Pablo le dijo a María: "Si me aumentan el sueldo, entonces el viernes yo te invito a cenar" y Pablo cumple siempre sus promesas. El viernes Pablo invitó a cenar a María. Por lo tanto a Pablo le aumentaron el sueldo.

2) Grafique en el plano: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$

3) Halle arctg(1.5574) en radianes.

4) Halle módulo y argumento del vector: $u = (-1, \sqrt{3})$

5) Grafique aproximadamente la función $y = \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$

6) Calcule el siguiente límite: $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{e^{-st} - 1}{-st} =$

7) Calcule la derivada primera de: $f(x) = \dfrac{\cos(e^{3x}) - \ln(x)}{x^2}$

8) Calcule la siguiente integral: $\int_0^1 (\text{sen}(\pi x) + x^2)\,dx =$

9) De acuerdo a la paridad de la función integrando, indique el valor de la siguiente integral: $\int_{-2}^{2} x^5\, e^{-x^2} dx =$

10) Indique Verdadero o Falso, justificando:

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si $f(a) \bullet f(b) < 0 \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \,/\, f(c) = 0$

11) Dada: $f(x) = (x-2) \bullet e^{-x}$, halle máximo y mínimo de f en [1,4]

CAMPUS VIRTUAL

La cátedra tiene habilitado un entorno virtual donde figuran todos los datos de la asignatura, trabajos prácticos, algunos materiales complementarios y exámenes anteriores. También tiene una sección de FOROS para que los alumnos puedan hacer consultas fuera del horario de clase, y una sección ANUNCIOS con información importante de parte de los docentes, como por ejemplo fechas de recuperatorios, notas de exámenes, etc.

¿COMO INGRESAR?

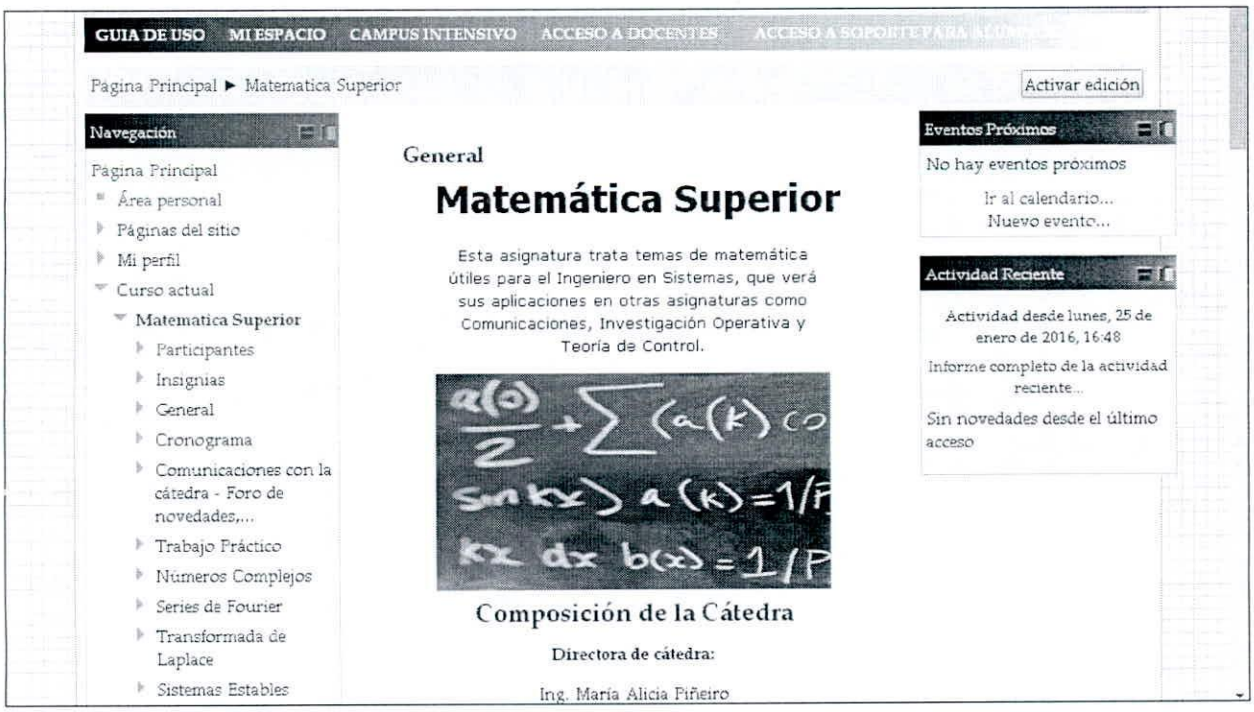
Desde la página del Departamento de Sistemas: www.sistemas.frba.utn.edu.ar

Luego se elige el ícono WEBCAMPUS, en la parte superior. Y se ingresa al Campus Virtual de Ingeniería en Sistemas de Información.

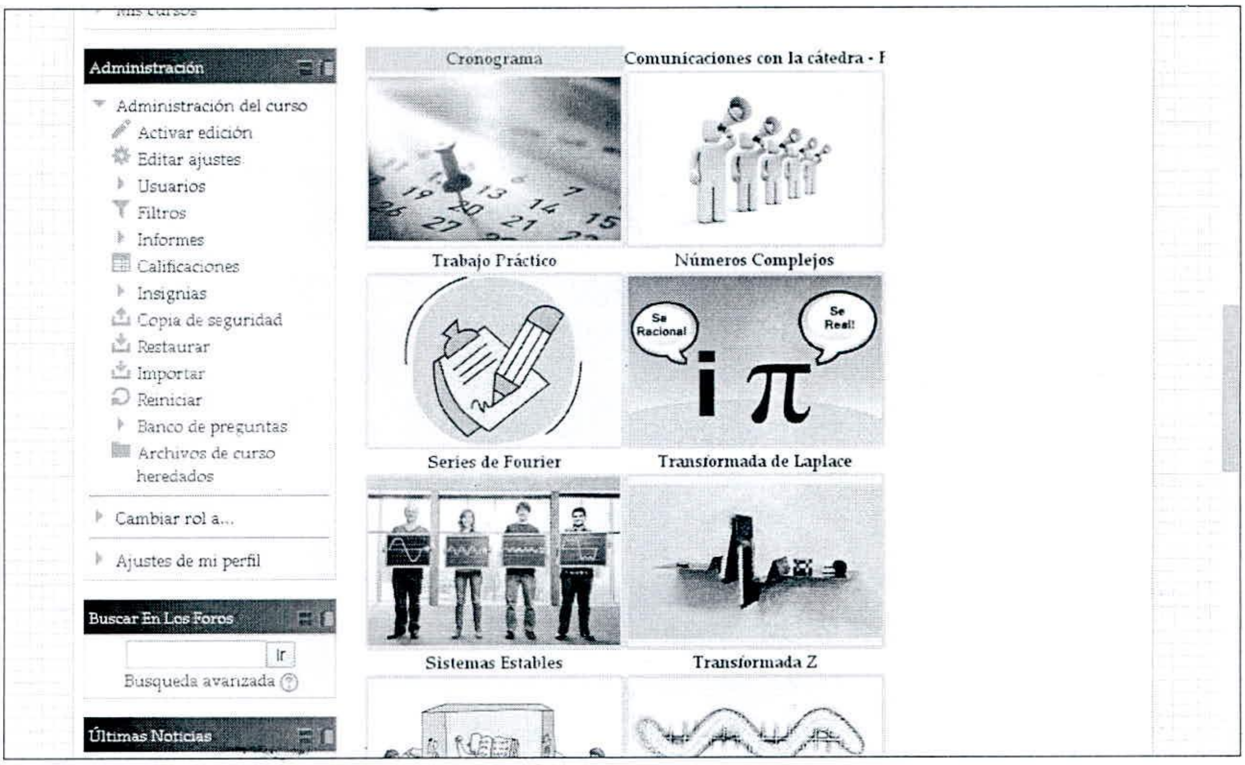
Para ingresar a Matemática Superior, debe seleccionarse:

3er Nivel $\rightarrow$ Matemática Superior $\rightarrow$ Matemática Superior

Y luego de ingresar el usuario y la clave (la primera vez si no tiene usuario debe crearlo), se llega a la página de nuestra asignatura:



Si bajamos un poco encontraremos las diferentes secciones:



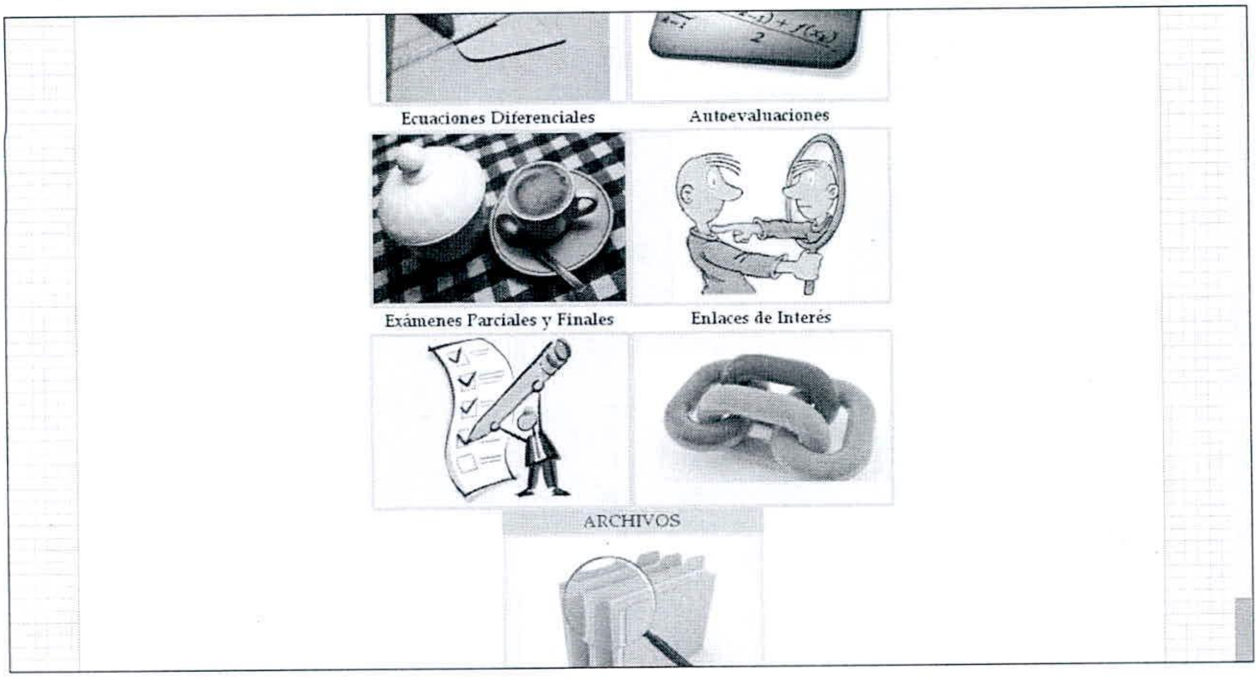
- Hay una sección Cronograma, donde figuran los cronogramas de los diferentes cursos, que se mantendrán actualizados ante los cambios que puedan deberse a imprevistos.
- En otra sección, de Comunicaciones con la cátedra, donde pueden leer:

  Novedades y Anuncios: aquí los docentes les informan cosas importantes como notas de parciales, cambios de fechas, si se agrega algún material o trabajo práctico, suspensión de clase, etc. Les recomendamos fijarse periódicamente en este foro ya que es de beneficio para ustedes.

  Consultas Generales: donde los alumnos pueden consultar lo que quieran relativo a la asignatura pero no de contenidos específicos del programa, por ejemplo sobre tema visto en una clase a la cual no pudo asistir, fecha para firmar la libreta, etc.

- Existe una sección exclusiva para Trabajo Practico, donde figura el enunciado del mismo, y se pueden hacer todas las consultas relativas.

- Y luego, por cada tema o unidad del programa, se tiene su sección correspondiente con materiales, links relacionados, autoevaluaciones y foro de consultas correpondiente.



- En la sección Exámenes Parciales y Finales, tienen disponibles muchos temas de exámenes tomados en años anteriores. La finalidad de los mismos es proveerles de mayor cantidad de ejercicios para practicar, y a modo de autoevaluación, pero de ninguna manera suplantan a la guía de trabajos prácticos, ni al estudio de los temas en forma conceptual.

Todo contacto con los docentes fuera del horario de clase, se deberá hacer a través de este entorno virtual. Además, el mismo es muy ventajoso para los alumnos, les recomendamos ingresar pronto y utilizarlo como un apoyo a las clases presenciales.

Bienvenidos!!!

EJERCITACION

NUMEROS COMPLEJOS

PARTE 1: FORMA BINOMICA

Ejercicio n° 1:

Resuelva las siguientes operaciones en forma binómica:

a) $(-2+6j)+3\bullet(4-j)-5j=$

b) $(2-j)^2\bullet(4+3j)=$

c) $\overline{3+2j}+\mathrm{Re}[(5-2j)^3]=$

d) $\mathrm{Im}\left[\dfrac{(4+7j)\bullet(6-2j)}{2j}\right]+4j=$

e) $\dfrac{j(1-3j)}{\overline{2+2j}\bullet j^7}=$

Ejercicio n° 2:

Determine para qué valores de x e y son válidas las siguientes igualdades:

a) $(1-2y)x+(3+5j)y=1+3j$

b) $6x+2y+(x-3yj)j=x^2+(y+6)j$

Ejercicio n° 3:

Calcule: a) $\dfrac{1+tg(\alpha)j}{1-tg(\alpha)j}=$ b) $\dfrac{a+bj}{c+dj}+\dfrac{a-bj}{c-dj}=$

Ejercicio n° 4:

Dados los números complejos: $z_1=\sqrt{3}+j$, $z_2=-\sqrt{3}+3j$, $z_3=2-2\sqrt{3}j$ efectúe:

a) $2z_1-(z_2^2-z_3)-\dfrac{z_2}{z_1}=$ b) $(z_1-z_2-\sqrt{3}\bullet z_3)^3=$

Ejercicio n° 5:

Determine el conjunto de los complejos que cumplan las siguientes condiciones:

a) que su cuadrado sea igual a su conjugado.

b) cuyo conjugado coincide con su inverso

Ejercicio n° 6:

Dado el número complejo $z = \dfrac{2 - x\,j}{2 + x\,j}$, calcule x para que su parte real sea cero y escriba el valor del complejo z.

Ejercicio n° 7:

Describa y construya la gráfica del lugar geométrico representado por cada una de las siguientes ecuaciones: (Considere: $z = x + y\,j$)

a) $-2 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 3 \wedge \operatorname{Re}(z) < -2$

b) $|z - j| < 2$

c) $z(\bar{z} + 2) = 3$

d) $|-j + \bar{z}| \leq 9$

e) $|z|^2 + \operatorname{Re}(z^2) = 2$

f) $1 < |z + j| \leq 2$

g) $\operatorname{Re}[(1 + 3j)z - (1 + 4j)] < 0$

h) $\left|\dfrac{z-5}{4+j}\right| < 1$

i) $-½ < \operatorname{Re}(z) < ½ \wedge |z| = 2$

j) $|z| = 1 \wedge \operatorname{Re}(z) = 1$

Ejercicio n° 8:

Resuelva las siguientes ecuaciones en C en forma binómica:

a) $(1 + j)\,z = 1$

b) $\dfrac{1}{z} = j$

c) $|z| - z = 1 + 2j$

d) $z^2 = 3 + 4j$

e) $z^2 = 5 - 12j$

f) $z^2 - (2 + j)\,z + (-1 + 7j) = 0$

g) $z^2 - (5 + 3j)\,z + (4 + 20j) = 0$

h) $(2 + j)\,z^2 - (5 - j)\,z + (2 - 2j) = 0$

i) $z^4 + 16 = 0$

j) $z^2 = (1 - j)^4$

> Recuerde:
> La conocida fórmula resolvente de una cuadrática se puede utilizar con complejos.

Ejercicio n° 9:

a) Escriba una ecuación polinómica de grado 2 con coeficientes complejos tal que una raíz sea real y la otra compleja no real.

b) ¿Sería posible lo mismo si los coeficientes fueran todos reales? ¿Por qué?

> Recuerde:
> Si z_1 y z_2 son las raíces de: $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ entonces $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} \wedge z_1 \bullet z_2 = \dfrac{c}{a}$

PARTE 2: FORMA POLAR

Ejercicio n° 10:

Complete la siguiente tabla:

Par ordenado	Binómica	Polar	Trigonométrica	Exponencial
	$\sqrt{3} + j$			
$(-2 , -2\sqrt{3})$				
		$[2 ; \pi/4]$		
			$3 (\cos \pi + j \operatorname{sen} \pi)$	
	$-4 + 4j$			
				$e^{j 5\pi/6}$
$(0 , -8)$				

Ejercicio n° 11:

Calcule el resultado de las siguientes operaciones en forma polar:

a) Dados: $z_1 = 2\, e^{j(\pi/2)}$ y $z_2 = -1 + j$ Halle: $z = z_1 + z_2^{10}$

b) Dados: $z_1 = 16\, e^{j(5\pi/6)}$ y $z_2 = 2\, e^{j(\pi/4)}$ Halle: $z = z_1 / z_2^3$

c) Dados: $z_1 = -1 + j\sqrt{3}$ y $z_2 = 2 - 2j$ Halle: $z = z_1^6 - z_2^4$

Ejercicio n° 12:

Sea $z = -1 - \sqrt{3}j$

a) Halle todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ tal que z^n sea real positivo.
b) Para el menor valor hallado, calcule z^n.
c) ¿Es posible hallar $n \in \mathbb{N}$ tal que z^n sea real negativo? Justifique.

PARTE 3: RAICES N-ESIMAS

☑ Ejercicio n° 13:

Resuelva las siguientes ecuaciones en C en forma polar:

a) $z^3 + j = 0$ b) $z^4 = 1 + j$ c) $\sqrt[3]{\dfrac{(1-j)}{\sqrt{3}+j}} = z$

d) $z^6 + 1 = \sqrt{3}\,j$ e) $(-1 + j)\,z^4 + 1 = 0$ f) $z^6 + 27\,j = 0$

☑ Ejercicio n° 14:

Considere la ecuación $z^n - 1 = 0$

a) Tomando n = 3, halle las raíces de la ecuación y analice si constituyen un grupo bajo la multiplicación.
b) Tomando n = 18, indique cuales son raíces primitivas.
c) Si n es un número primo, indique cuantas raíces son primitivas.

☑ Ejercicio n° 15:

Teniendo en cuenta la forma de calcular raíces n-ésimas de un complejo en forma polar, resuelva los siguientes problemas:

a) Halle los vértices de un hexágono regular inscripto en una circunferencia con centro en el origen y radio igual a 1, sabiendo que uno de ellos es el punto (1,0).

b) El número 5j es una raíz cúbica de un número complejo, calcule las otras raíces y el número.

c) Un cuadrado de centro 0 tiene un vértice en (3,4). Halle las coordenadas de los demás vértices.

d) Halle los vértices y grafique el cuadrilátero cuyos vértices son los afijos de las raíces de la ecuación $z^4 + 4 = 0$.

e) Calcule el área del hexágono cuyos vértices son los afijos de las raíces sextas del complejo $z = -64\,j$.

☑ Ejercicio n° 16:

Indique la validez de las siguientes afirmaciones, demostrandolas o refutando con un contraejemplo:

a) Si w_k es una raíz primitiva de la unidad, entonces k es primo.
b) Si n es impar entonces w_2 es una raíz primitiva de orden n de la unidad.
c) Las raíces cuartas de todo complejo con argumento π , son dos pares de complejas conjugadas.
d) Existen 8 raíces primitivas de la unidad de orden 30.

PARTE 4: LOGARITMO NATURAL Y EXPONENCIALES COMPLEJAS

Ejercicio n° 17:

Halle ln z para:

a) $z = \sqrt{3} - \sqrt{3}j$

b) $z = -4$

c) $z = -e^{j\pi}$

d) $z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + j\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4})$

e) $z = e^{-3/2j\pi}$

Ejercicio n° 18:

Sea $z = (k+4, \frac{\sqrt{3}}{2})$ Halle el o los valores de $k \in R$ tal que ln(z) sea imaginario puro.

Ejercicio n° 19:

Halle el valor principal de z que verifique las siguientes igualdades:

a) $(1 + j)^z = 1$

b) $(\frac{1+j\sqrt{3}}{2})^z = j$

c) $z = \sqrt[1+j]{j}$

d) Halle módulo de $z = (\sqrt{3} + j)^j$

e) $\sqrt[z]{\frac{1-\sqrt{3}j}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}j}{2j}$

f) $z = (-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2})^{5j}$

PARTE 5: EJERCICIOS COMBINADOS

Ejercicio n° 20:

Halle analíticamente y grafique los conjuntos (Considere: $z = x + j\,y$)

$A = \{ z \in C \,/\, \mathrm{Re}(z^2) + z + \bar{z} = |1+\sqrt{2}j|^2 \}$

$B = \{ z \in C \,/\, z^5 + 4 - 4j = 0 \ \wedge\ 5|z|^2 + 3\,\mathrm{Re}(z^2) \leq 8 \}$

$C = \{ z \in C \,/\, z^2 - (6-2j)\,z + 11 - 10j = 0 \ \wedge\ |z - 3| \leq 2 \}$

$D = \{ z \in C \,/\, |z - 2|^2 + 1 \geq 0.5\,[\mathrm{Im}(z - \bar{z})]^2 \}$

$E = \{ z \in C \,/\, |z| \leq 3 \ \wedge\ 5|z|^2 - 4\,\mathrm{Re}(z^2) \geq 9 \}$

Ejercicio n° 21:

Grafique en el plano complejo cada uno de los siguientes conjuntos. Halle analíticamente y grafique en otro par de ejes la imagen de la función compleja f(z) = 1/z con dominio en cada uno de los conjuntos D.

a) $D = \{ z \in C \,/\, |z| \leq 1 \}$

b) $D = \{ z \in C \,/\, |z - 1| = 1 \}$

PARTE 6: SUPERPOSICION DE SEÑALES SENOIDALES DE IGUAL FRECUENCIA

Ejercicio n° 22:

Dadas las funciones f y g obtenga la función f+g utilizando fasores:

a) $f(t) = 5\cos(2t - \frac{\pi}{3})$ y $g(t) = 8\cos(2t + \frac{\pi}{6})$

b) $f(t) = \text{sen}(5t - \frac{\pi}{2})$ y $g(t) = \text{sen}(5t + \frac{\pi}{3})$

c) $f(t) = \text{sen}(2t + \frac{\pi}{4})$ y $g(t) = \text{sen}(2t - \frac{\pi}{3})$

d) $f(t) = 4\cos(3t)$ y $g(t) = 6\,\text{sen}(3t)$

e) $f(t) = 4\cos(3t + \frac{\pi}{4})$ y $g(t) = 6\cos(3t - \frac{\pi}{3})$

Ejercicio n° 23:

Analice la validez de las siguientes proposiciones, justificando:

a) La suma de dos funciones senoidales es siempre una función senoidal.

b) Si $f_1(t) = A_1\,\text{sen}(wt+\varphi_1)$ y $f_2(t) = A_2\,\text{sen}(wt+\varphi_2)$ $\Rightarrow$ La amplitud de la onda $f_1(t) + f_2(t)$ no puede ser menor que A_1 ni menor que A_2

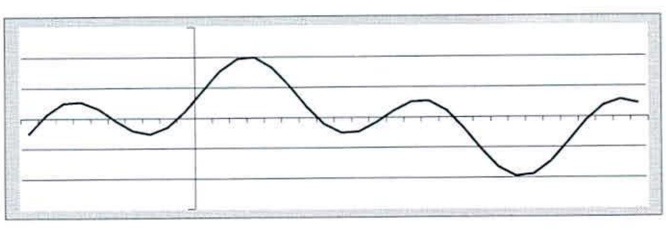
c) La suma de dos funciones senoidales de la misma frecuencia y amplitud con diferencia de fase $0 < \varphi < \pi/2$ tiene siempre amplitud mayor a la de las funciones dadas.

Ejercicio n° 24:

Indique un valor de $\varphi < \pi$ tal que la amplitud de $f(t) = A\cos(wt) + A\cos(wt + \varphi)$ sea la misma A.

Ejercicio n° 25:

La siguiente gráfica corresponde a una función que es suma de dos armónicas simples. Indique si se trata de dos funciones de la misma frecuencia o de distinta frecuencia. Justifique.



EJERCICIOS PARA MARCAR LA RESPUESTA CORRECTA, tomados en Finales:

☑ Ejercicio n° 26:

Marcar la única respuesta correcta de cada ítem:

1.	Sean w_0, w_1 y w_2 las raíces cúbicas de $z = 8\,j$ entonces es FALSO: a) w_2 es imaginaria pura b) ninguna es real c) hay dos complejas conjugadas d) una está en el 1er cuadrante
2.	Sabiendo que w es una de las raíces cuartas de $z = -7 + 24j$, entonces se puede asegurar que: a) w no es imaginaria pura b) $\|w\| = 5$ c) la conjugada también es raíz cuarta d) $w = 1 - 2j$
3.	El valor principal del complejo $z = (\frac{4}{5} + j\frac{3}{5})^{5j}$ es: a) imaginario puro b) real c) complejo no real ni imaginario puro
4.	Sea z_1 la raíz de mayor módulo de la ecuación: $z^2 + 2z + 3 + j(2z + 6) = 0$ y z_2 la de menor módulo, entonces: a) z_1 es imaginaria pura b) $z_2 \in$ I cuadrante c) $\bar{z}_1 = z_2$ d) z_2^2 es real
5.	Los complejos que verifican la ecuación $z^2 = 2 \bullet \bar{z}$ son: a) dos complejos conjugados y dos reales b) dos reales y dos imaginarios puros c) sólo dos complejos conjugados d) infinitas soluciones
6.	La ecuación $z^2 - 3z + 3 - j = 0$ tiene como solución: a) dos complejos conjugados b) dos imaginarios puros c) un real y un complejo no real d) ninguna de las anteriores
7.	Dada la ecuación $z^4 + 7 + 24\,j = 0$: a) sus raíces son dos pares de complejos conjugados b) dos de las raíces son imaginarias puras c) una raíz es $-2 + j$ d) ninguna de las anteriores

8.	Sabiendo que $(f+g)(t) = 2\sqrt{3}\cos(5t + \frac{\pi}{2}) \wedge f(t) = \sqrt{3}\cos(5t + \frac{\pi}{6})$ entonces g(t) es: a) $g(t) = 3\cos(5t + \frac{2\pi}{3})$ b) $g(t) = \sqrt{3}\cos(5t + \frac{\pi}{3})$ c) $g(t) = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(5t - \frac{\pi}{6})$ d) otra
9.	Dada una ecuación polinómica de grado 5 con todos los coeficientes reales, se puede asegurar: a) tiene por lo menos una raíz real b) no todas sus raíces son reales c) hay por lo menos un par de raíces complejas conjugadas d) ninguna de las anteriores
10.	El fasor asociado a la suma de las funciones $f(t) = \sqrt{3}\cos(\omega t + k\frac{\pi}{6})$ y $g(t) = \sqrt{3}\cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$ es imaginario puro si: a) k = 1 b) k = 3 c) k = 5 d) ninguna de las anteriores
11.	Las dos soluciones de la ecuación: $z^2 = 8 + 2\bar{z}$ pertenecen al conjunto: a) $\{ (a,b) \in C / a \neq 0 \wedge b = 0 \}$ b) $\{ (a,b) \in C / a > 0 \wedge b = 0 \}$ c) $\{ (a,b) \in C / a > 0 \wedge b \neq 0 \}$ d) $\{ (a,b) \in C / a = 2b \wedge b \neq 0 \}$
12.	Los valores de m y n reales tales que la ecuación $z^2 - mz + n = 0$ tenga como una de sus raíces a $z_1 = 2 - 5j$ son: a) $m = 4 \wedge n = 6$ b) $m = 4 \wedge n = 29$ c) $m = 0 \wedge n = 29$ d) ninguno de los anteriores
13.	El valor principal de ln(z) siendo $z = -aj$ con $a \in R^+$ siempre tiene: a) la misma parte real b) la misma parte imaginaria c) el mismo módulo d) ninguno de los anteriores
14.	El valor principal de ln(z) siendo $z = \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}j$ con $a \in R-\{0\}$ siempre tiene: a) la misma parte real b) la misma parte imaginaria c) el mismo módulo d) ninguno de los anteriores

RESPUESTAS EJERCICIOS DE COMPLEJOS:

Ej. 1:

a) $10 - 2j$ b) $24 - 7j$ c) $68 - 2j$ d) $-19+4j$ e) $-1 + 0.5j$

Ej. 2:

a) $x = 4 \quad y = 3/5$ b) $(x = 5 \wedge y = -1) \vee (x = 6 \wedge y = 0)$

Ej. 3:

a) $\cos(2\alpha) + j\,\mathrm{sen}(2\alpha)$ b) $\dfrac{2ac + 2bd}{c^2 + d^2}$

Ej. 4:

a) $(8 + 2\sqrt{3}) + j(2 + 3\sqrt{3})$ b) $-64j$

Ej. 5:

a) $z = (-\tfrac{1}{2}, \sqrt{3}/2) \vee z = (-\tfrac{1}{2}, -\sqrt{3}/2) \vee z = (0,0) \vee z = (1,0)$

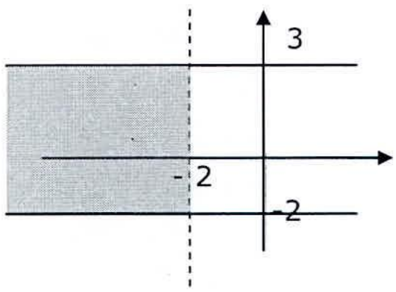
b) todos los complejos de módulo unitario, o sea $z = x + jy$ con $x^2 + y^2 = 1$

Ej. 6:

$x = 2 \vee x = -2$ entonces $z = -j \vee z = j$

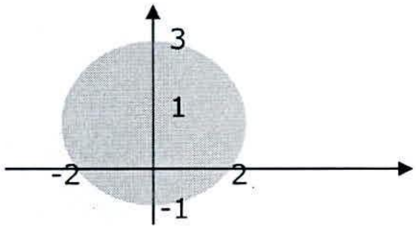
Ej. 7:

a) $-2 \le y \le 3 \wedge x < -2$



b) $x^2 + (y-1)^2 < 2^2$

Círculo con Centro en (0,1) y radio 2



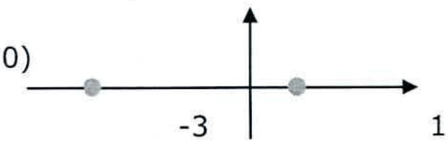
c) $z(\bar{z}+2)=3 \Rightarrow (x+yj)(x-yj+2)=3$

$\Rightarrow x^2 - xyj + 2x + xyj + y^2 + 2yj = 3 \Rightarrow x^2 + 2x + y^2 + 2yj = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2x + y^2 = 3 \quad \wedge \quad 2y = 0 \quad \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \wedge \quad y = 0$

$\Rightarrow (x = 1 \vee x = -3) \quad \wedge \quad y = 0$

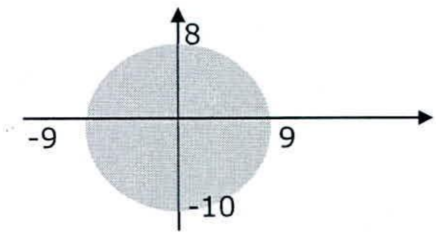
$\Rightarrow$ Son dos puntos: $z = (1,0) \vee z = (-3,0)$



d) $|-j+\bar{z}| \leq 9 \Rightarrow |-j+x-yj| \leq 9$

$\Rightarrow x^2 + (y+1)^2 \leq 81$

Círculo con Centro en (0, -1) y radio 9

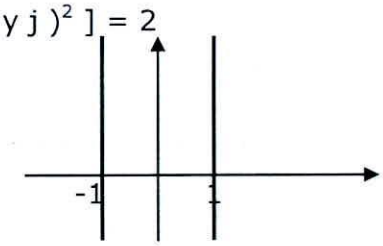


e) $|z|^2 + \mathrm{Re}(z^2) = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + \mathrm{Re}[(x+yj)^2] = 2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + \mathrm{Re}(x^2 + 2xyj - y^2) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + x^2 - y^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = -1$



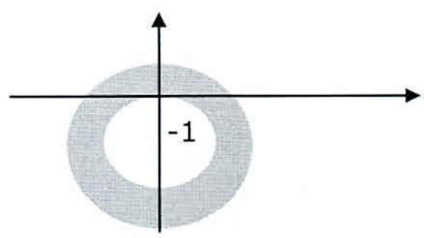
Es un par de rectas paralelas

f) $1 < |z+j| \leq 2 \Rightarrow 1 < |x+yj+j| \leq 2$

$\Rightarrow 1 < x^2 + (y+1)^2 \leq 4$

Anillo circular con Centro en (0,-1)

radio menor abierto 1 y radio mayor 2

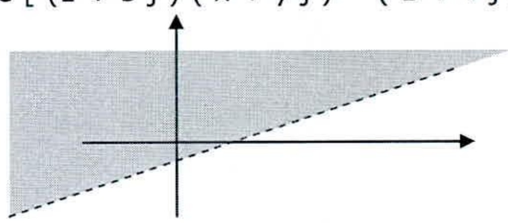


g) $\mathrm{Re}[(1+3j)z - (1+4j)] < 0 \Rightarrow \mathrm{Re}[(1+3j)(x+yj) - (1+4j)] < 0$

$\Rightarrow \mathrm{Re}[x + yj + 3jx - 3y - 1 - 4j] < 0$

$\Rightarrow x - 3y - 1 < 0 \Rightarrow x - 3y < 1$

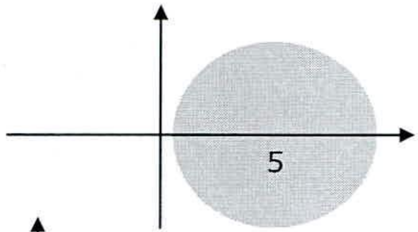
Semiplano



h) $\left|\dfrac{z-5}{4+j}\right| < 1 \Rightarrow \dfrac{|x+jy-5|}{|4+j|} < 1 \Rightarrow |x+jy-5| < |4+j|$

$\Rightarrow (x-5)^2 + y^2 < 17$

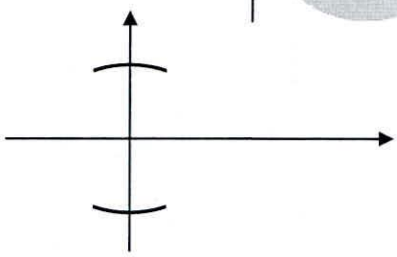
Círculo abierto con centro en (5,0) y radio $\sqrt{17}$



i) $-\frac{1}{2} < Re(z) < \frac{1}{2} \wedge |z| = 2$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \wedge \sqrt{x^2+y^2} = 2$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \wedge x^2 + y^2 = 4$

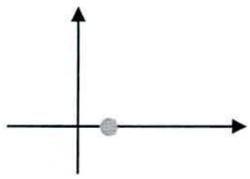


Son dos arcos parte de una circunferencia

j) $|z| = 1 \wedge Re(z) = 1$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1 \wedge x = 1 \Rightarrow z = (1, 0)$

Es un único punto



Ej. 8:

a) $(1+j)z = 1 \Rightarrow z = 1/(1+j) \Rightarrow z = 1 - j/2 \Rightarrow$ $\mathbf{z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} j}$

b) $\dfrac{1}{z} = j \Rightarrow z = \dfrac{1}{j} \Rightarrow$ $\mathbf{z = -j}$

c) $|z| - z = 1 + 2j \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} - x - yj = 1 + 2j \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} - x = 1 \wedge -y = 2$

$\Rightarrow y = -2 \wedge \sqrt{x^2+4} = x + 1 \Rightarrow x^2 + 4 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x = 1.5$

$\Rightarrow$ $\mathbf{z = 1.5 - 2j}$

d) $z^2 = 3 + 4j \Rightarrow$ $\mathbf{z = 2 + j}$ $\vee$ $\mathbf{z = -2 - j}$

e) $z^2 = 5 - 12j \Rightarrow$ $\mathbf{z = 3 - 2j}$ $\vee$ $\mathbf{z = -3 + 2j}$

f) $z^2 - (2+j)z + (-1+7j) = 0 \Rightarrow$ $\mathbf{z = 3 - j}$ $\vee$ $\mathbf{z = -1 + 2j}$

g) $z^2 - (5+3j)z + (4+20j) = 0 \Rightarrow$ $\mathbf{z = 5 - j}$ $\vee$ $\mathbf{z = 4j}$

h) $(2+j)z^2 - (5-j)z + (2-2j) = 0 \Rightarrow$ $\mathbf{z = 1 - j}$ $\vee$ $\mathbf{z = 4/5 - 2/5\, j}$

i) $z^4 + 16 = 0 \Rightarrow z^4 = -16 \Rightarrow z = \sqrt{\sqrt{-16}} \Rightarrow z = \sqrt{4j} \vee z = \sqrt{-4j}$

$\Rightarrow$ $\mathbf{z_1 = \sqrt{2} + j\sqrt{2}}$; $\mathbf{z_2 = -\sqrt{2} + j\sqrt{2}}$; $\mathbf{z_3 = -\sqrt{2} - j\sqrt{2}}$; $\mathbf{z_4 = \sqrt{2} - j\sqrt{2}}$

j) $z^2 = (1 - j)^4 \Rightarrow z = \pm\sqrt{(1-j)^4} = \pm(1 - j)^2 \Rightarrow z = \pm(1 - 2j - 1) = \pm(-2j)$

$\Rightarrow$ **$z = 2j$** $\vee$ **$z = -2j$**

Ej. 9:

a) Sea la raíz real: $z_1 = a$ y la raíz no real: $z_2 = b + cj$, entonces la ecuación es:
$z^2 - (a + b + cj) \bullet z + a \bullet (b + cj) = 0$

Por ejemplo, si queremos que las raíces sean $z_1 = 3$ y $z_2 = -2 + j$, la ecuación es: $z^2 - (1 + j) \bullet z + (-6 + 3j) = 0$

b) Si todos los coeficientes fueran reales, ambas raíces serían conjugadas entre sí, o sea es imposible que una sea real y la otra compleja no real.

Ej. 10:

Par ordenado	Binómica	Polar	Trigonométrica	Exponencial
$(\sqrt{3}, 1)$	**$\sqrt{3} + j$**	$[2 ; \pi/6]$	$2(\cos \pi/6 + j \operatorname{sen} \pi/6)$	$2 e^{j\pi/6}$
$(-2, -2\sqrt{3})$	$-2 - 2\sqrt{3}j$	$[4 ; 4\pi/3]$	$4(\cos 4\pi/3 + j \operatorname{sen} 4\pi/3)$	$4 e^{j4\pi/3}$
$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$\sqrt{2} + \sqrt{2}j$	**$[2 ; \pi/4]$**	$2(\cos \pi/4 + j \operatorname{sen} \pi/4)$	$2 e^{j\pi/4}$
$(-3, 0)$	-3	$[3 ; \pi]$	**$3(\cos \pi + j \operatorname{sen} \pi)$**	$3 e^{j\pi}$
$(-4, 4)$	**$-4 + 4j$**	$[4\sqrt{2} ; 3\pi/4]$	$4\sqrt{2}(\cos 3\pi/4 + j \operatorname{sen} 3\pi/4)$	$4\sqrt{2} e^{j3\pi/4}$
$(-\sqrt{3}/2, 1/2)$	$-\sqrt{3}/2 + \frac{1}{2}j$	$[1 ; 5\pi/6]$	$\cos 5\pi/6 + j \operatorname{sen} 5\pi/6$	**$e^{j5\pi/6}$**
$(0, -8)$	$-8j$	$[8 ; 3\pi/2]$	$8(\cos 3\pi/2 + j \operatorname{sen} 3\pi/2)$	$8 e^{j3\pi/2}$

Ej. 11:

a) $z = -30j$ b) $z = 2e^{j(\pi/12)}$ c) $z = 128$

Ej. 12:

a) $n = 3k$ con $k \in Z^+$. b) Menor valor $n = 3 \Rightarrow z^3 = 8$ c) No es posible.

Ej. 13:

a) $w_0 = [\ 1\ ;\ \frac{\pi}{2}]$ $w_1 = [\ 1\ ;\ 7\frac{\pi}{6}\ ]$ $w_2 = [\ 1\ ;\ 11\frac{\pi}{6}\ ]$

b) $w_0 = [\sqrt[8]{2}\ ;\ \frac{\pi}{16}]$ $w_1 = [\sqrt[8]{2}\ ;\ 9\frac{\pi}{16}]$ $w_2 = [\sqrt[8]{2}\ ;\ 17\frac{\pi}{16}]$ $w_3 = [\sqrt[8]{2}\ ;\ 25\ \frac{\pi}{16}]$

c) $w_0 = [1/\sqrt[6]{2}\ ;\ 19\frac{\pi}{36}]$ $w_1 = [1/\sqrt[6]{2}\ ;\ 43\frac{\pi}{36}]$ $w_2 = [1/\sqrt[6]{2}\ ;\ 67\frac{\pi}{36}]$

d) $w_0 = [\sqrt[6]{2}\ ;\frac{\pi}{9}]$ $w_1 = [\sqrt[6]{2}\ ;\ 4\frac{\pi}{9}]$ $w_2 = [\sqrt[6]{2}\ ;\ 7\frac{\pi}{9}]$ $w_3 = [\sqrt[6]{2}\ ;\ 10\frac{\pi}{9}]$

$w_4 = [\sqrt[6]{2}\ ;\ 13\frac{\pi}{9}]$ $w_5 = [\sqrt[6]{2}\ ;\ 16\frac{\pi}{9}]$

e) $w_0=[\sqrt[8]{1/2}\ ;\ \frac{\pi}{16}]$ $w_1=[\sqrt[8]{1/2}\ ;\ 9\frac{\pi}{16}]$ $w_2=[\sqrt[8]{1/2}\ ;\ 17\frac{\pi}{16}]$ $w_3=[\sqrt[8]{1/2}\ ;\ 25\frac{\pi}{16}]$

f) $w_0 = [\sqrt{3}\ ;\frac{\pi}{4}]$ $w_1 = [\sqrt{3}\ ;\ 7\frac{\pi}{12}]$ $w_2 = [\sqrt{3}\ ;\ 11\frac{\pi}{12}]$ $w_3 = [\sqrt{3}\ ;\ 5\frac{\pi}{4}]$

$w_4 = [\sqrt{3}\ ;\ 19\frac{\pi}{12}]$ $w_5 = [\sqrt{3}\ ;\ 23\frac{\pi}{12}]$

Ej. 14:

a) $w_0 = [1\ ;\ 0] = 1$; $w_1 = [1\ ;\ 2\frac{\pi}{3}\ ] = -1/2 + \frac{\sqrt{3}}{2}j$; $w_2 = [1\ ;\ 4\frac{\pi}{3}] = -1/2 - \frac{\sqrt{3}}{2}j$

Observando la tabla de este conjunto con la multiplicación:

$\bullet$	w_0	w_1	w_2
w_0	w_0	w_1	w_2
w_1	w_1	w_2	w_0
w_2	w_2	w_0	w_1

Vemos que la operación es cerrada, es asociativa y conmutativa, tienen neutro (w_0) y todos tienen inverso, entonces es un grupo abeliano.

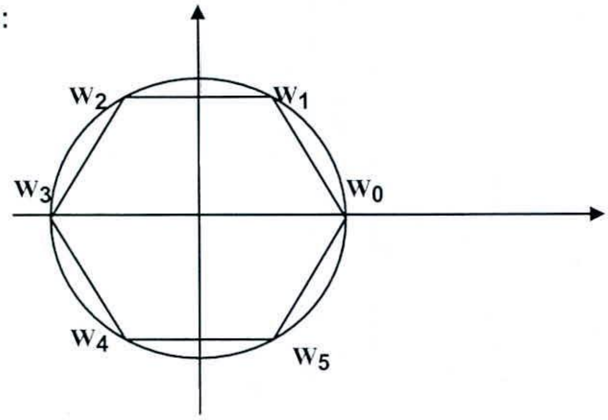
b) Si n = 18 son primitivas: w_1 , w_5 , w_7 , w_{11} , w_{13} y w_{17}

c) Si n es primos, todas las , w_k son primitivas excepto la w_0

Ej. 15:

a) $w_0= [1\ ;\ 0]$ $w_1= [1;\ \frac{\pi}{3}]$ $w_2= [1;\ 2\frac{\pi}{3}]$ $w_3= [1;\ \pi]$ $w_4= [1;\ 4\frac{\pi}{3}]$ $w_5= [1;\ 5\frac{\pi}{3}]$

La gráfica es:



b) $z = (5j)^3 = -125\,j$; $w_0 = [5; \frac{\pi}{2}] = 5\,j$; $w_1 = [5; 7\frac{\pi}{6}]$; $w_2 = [5; 11\frac{\pi}{6}]$

c) Vértices: $v_1 = (3 ; 4)$, $v_2 = (-4 ; 3)$, $v_3 = (-3 ; -4)$ y $v_4 = (4 ;-3)$

d) Vértices: $v_1 = 1 + j$, $v_2 = -1 + j$, $v_3 = -1 - j$, $v_4 = 1 - j$

e) Como $z = -64\,j$ tiene módulo 64, sus raíces sextas tienen módulo 2, que es la medida de los lados del hexágono, entonces su área es: $6\sqrt{3}$.

☑ Ej. 16:

a) FALSO, por ejemplo w_4 es primitiva de orden 7, pero 4 no es primo.
b) VERDADERO, ya que si n es impar el m.c.d.(n, 2) = 1
c) VERDADERO, pues los argumentos son $\frac{\pi}{4}$, $3\frac{\pi}{4}$, $5\frac{\pi}{4}$ y $7\frac{\pi}{4}$. Como todas tienen el mismo módulo resultan ser w_1 la conjugada de w_4, y w_2 conjugada de w_3.
d) VERDADERO, si n = 30 son primitivas: w_1 , w_7 , w_{11} , w_{13} , w_{17} , w_{19} , w_{23} , w_{29}

☑ Ej. 17:

a) $\ln z = \ln\sqrt{6} + (-\frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi)\,j$ b) $\ln z = \ln 4 + (\pi + 2\,k\,\pi)\,j$

c) $\ln z = 2k\pi\,j$ d) $\ln z = \ln\sqrt{2} + (\frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi)\,j$ e) $\ln z = (-3\frac{\pi}{2} + 2k\pi)\,j$

☑ Ej. 18:

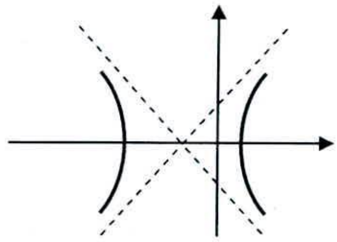
Los valores de $k \in R$ son: $k = -\frac{7}{2} \vee k = -\frac{9}{2}$

☑ Ej. 19:

a) $z = 0$ b) $z = \frac{3}{2}$ c) $z = e^{\pi/4}\,\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j)$

d) $|z| = e^{(-\pi/6)}$ e) $z = 10/11$ f) $z = e^{-15/4\pi}$

Ej. 20:



a) $(x+1)^2 - y^2 = 4$

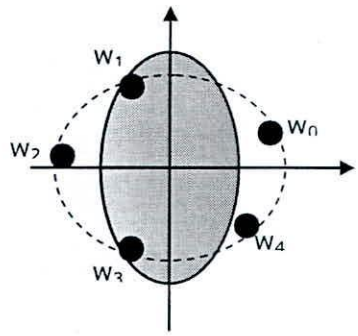
Hipérbola equilátera de centro C(-1;0) eje focal x.

b) $B_1 = \{ z \in C \,/\, z^5 + 4 - 4j = 0 \}$ son cinco puntos

$B_2 = \{ z \in C \,/\, 5|z|^2 + 3\,\mathrm{Re}(z^2) \leq 8 \}$

es una elipse de centro (0;0) y su interior

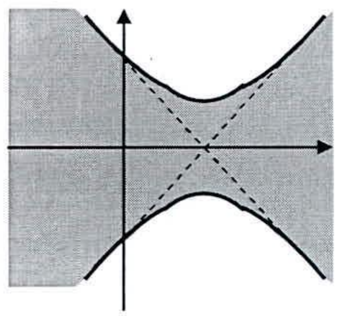
La intersección son los puntos:



$$w_1 = [\sqrt{2}\ ;\ \frac{11}{20}\pi\ ]$$

$$w_3 = [\sqrt{2}\ ;\ \frac{27}{20}\pi\ ]$$

c) Un solo punto $C = \{ 4 + j \}$

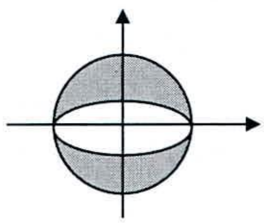


d) Interior de hipérbola: $-(x-2)^2 + y^2 \leq 1$

centro en C(2;0)

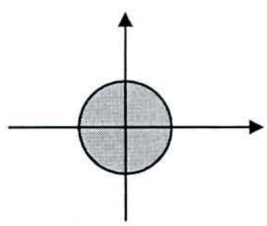
e) Rosca entre círculo y elipse.

$x^2 + y^2 \leq 3 \quad \wedge \quad x^2 + 9y^2 \geq 9$

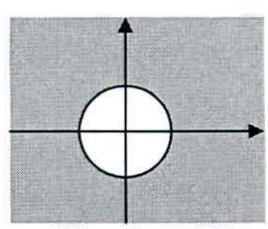


Ej. 21:

a) El conjunto $D = \{ z \in C \,/\, |z| \leq 1 \}$ está formado por todos los complejos de módulo menor o igual a uno, es decir los que están ubicados a una distancia menor o igual de una unidad del origen de coordenadas, o sea en un círculo de radio 1 con centro en el origen:



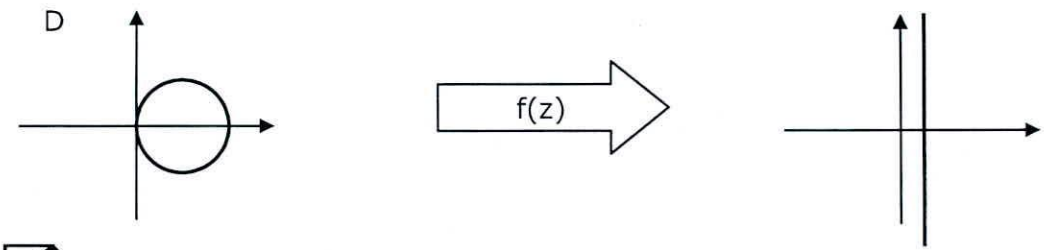
Al aplicar la función f, que invierte los complejos, obtenemos complejos de módulo mayor o igual a uno, es decir el exterior del círculo:



b) El conjunto D ={ z ∈ C / | z -1| = 1 } es una circunferencia de centro en (1,0) y radio r=1, cuya ecuación es: $(x-1)^2 + y^2 = 1$ o bien $x^2 + y^2 = 2x$

Al aplicarle la función $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+jy} = \frac{1}{x+jy} \bullet \frac{x-jy}{x-jy} = \frac{x-jy}{x^2+y^2} = \frac{x-jy}{2x} = \frac{1}{2} - \frac{jy}{2x}$

Es decir todas las imágenes de la función aplicada a los elementos del conjunto D, son los complejos con parte real igual a 0.5. Su gráfica es una recta.



Ej. 22:

a) f+g(t) = 9.434 cos(2t - 0.035)
b) f+g(t) = 0.517 sen(5t – π/12)
c) f+g(t) = 1.217 sen(2t – 0.13)
d) f+g(t) = 7.21 cos(3t - 0.98)
e) f+g(t) = 6.29 cos(3t - 0.38)

Ej. 23:

a) Falso b) Falso c) Verdadero

Ej. 24:

$\varphi = 2/3\ \pi$

Ej. 25:

Es suma de funciones de distinta frecuencia, ya que no es una función senoidal.

Ej. 26:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
c	a	b	a	a	d	c	a	a	c	a	b	b	a

EJERCITACION

SERIES Y TRANSFORMADAS DE FOURIER

PARTE 1: SERIE TRIGONOMETRICA DE FOURIER

Ejercicio n° 1:

Desarrolle las siguientes funciones de periodo $T=2\pi$ en Serie Trigonométrica de Fourier:

a) $f(x) = x^2$ si $0 < x < 2\pi$ y $f(x) = f(x+2\pi)$

b) A partir de la Serie obtenida en a), halle el resultado de la serie numérica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

c) $f(t) = t^2$ en $(-\pi, \pi)$ y $f(t + 2\pi) = f(t)$

d) A partir de la Serie obtenida en c), halle el resultado de la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Ejercicio n° 2:

Desarrolle las siguientes funciones de período T en Serie Trigonométrica de Fourier:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,3) \\ -1 & \text{si } x \in (-3,0) \end{cases}$ y $f(x) = f(x+6)$

b) $f(t) = \begin{cases} 6 & \text{si } |t| < 2 \\ 0 & \text{si } 2 < |t| < 4 \end{cases}$ y $f(t) = f(t+8)$

c) $f(t) = \begin{cases} 8 & 0 < t < 2 \\ -8 & 2 < t < 4 \end{cases}$ y $f(t) = f(t+4)$

d) $f(t) = 4t \quad 0 < t < 10$ y $f(t) = f(t+10)$

Ejercicio n° 3:

Sea $f(t) = \begin{cases} 2-t & 0 < t < 4 \\ t-6 & 4 < t < 8 \end{cases}$ y $f(t) = f(t+8)$

a) Grafique la función f(t) y redefínala para el período (-4;4)

b) En función al punto anterior desarrolle la STF teniendo en cuenta la paridad de la función.

c) En base a la respuesta anterior calcule $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$

Ejercicio n° 4:

Dadas las siguientes funciones definidas sólo en un intervalo:

a) $f(x) = \text{sen } x$ $\quad x \in (0,\pi)$
b) $f(x) = x$ $\quad x \in (0,2)$
c) $f(t)=\cos(t)$ $\quad 0<t<\pi$
d) $f(t) = e^t$ $\quad 0<t<1$
e) $f(t) = \pi - t$ $\quad 0<t<\pi$

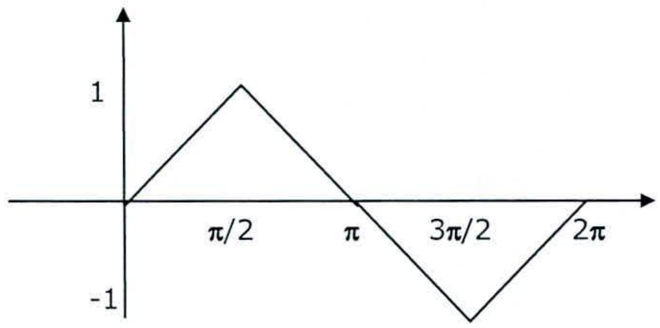
i) Complete cada función en todo el eje real para que la Serie Trigonométrica de Fourier sea solo de cosenos y desarrolle cada Serie.

ii) Idem anterior pero Serie de Senos.

Ejercicio n° 5:

El desarrollo en serie de Fourier de la onda triangular (ver figura) es:

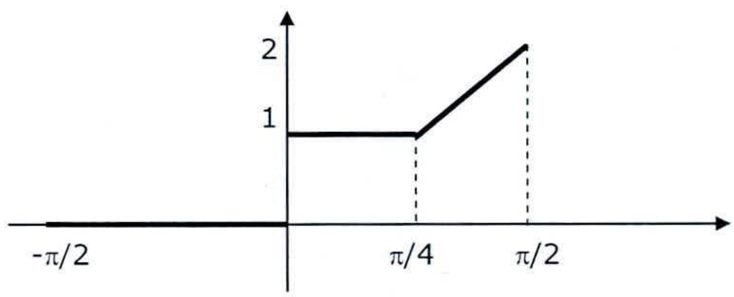
$$S(x) = \frac{8}{\pi^2} \left(\text{sen}(wt) - \frac{1}{9} \text{sen}(3wt) + \frac{1}{25} \text{sen}(5wt) - \frac{1}{49} \text{sen}(7wt) + \bullet\bullet\bullet \right)$$



a) ¿Por qué sólo aparecen términos con senos?
b) ¿Por qué sólo aparecen términos con frecuencias impares?

Ejercicio n° 6:

Dada la siguiente función definida en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



Complete la función en $[-\pi,\pi]$ para que tenga simetría de media onda.

Ejercicio n° 7:

a) Si una función es par y además tiene simetría de media onda, ¿qué términos serán nulos de la Serie Trigonométrica de Fourier?

b) Sea $S(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos(nx) + \frac{(-1)^{2n-1}}{n} \operatorname{sen}(nx)$ la S.T.F. de f(x)

¿Puede ser f(x) una función par? ¿O impar? Justifique.

PARTE 2: SERIE EXPONENCIAL DE FOURIER

Ejercicio n° 8:

Dadas las siguientes funciones, grafíquelas, desarróllelas en Serie Exponencial de Fourier y grafique el espectro de amplitud de frecuencias:

a) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -2<t<2 \\ 0 & \text{si } 2<|t|<10 \end{cases}$ y $f(t) = f(t+20)$

b) $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in (0,2) \\ 4-t & \text{si } t \in (2,4) \end{cases}$ y $f(t + 4) = f(t)$

c) $f(t)=2t$ si $t \in [0,2)$ y $f(t) = f(t+2)$

OPTATIVO: $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2<t<0 \\ t^2 & \text{si } 0<t<2 \end{cases}$ y $f(t + 4) = f(t)$

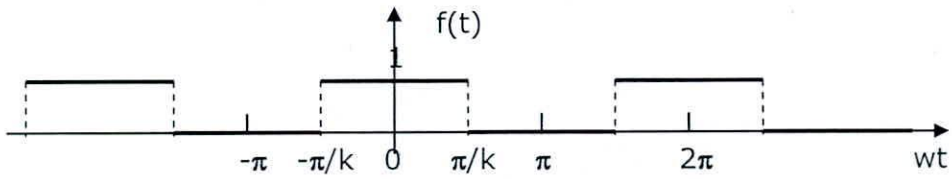
Ejercicio n° 9:

a) Sea $f(t) = t^2$ si $0 \leq t < 1$ Complete en forma gráfica y analítica la función para que el desarrollo en Serie Exponencial de Fourier tenga coeficientes imaginarios puros y además f(t) tenga simetría de media onda.

b) Dé un ejemplo de una función periódica f(x) con T=2 tal que los coeficientes de la Serie Exponencial de Fourier sean todos imaginarios puros excepto el $c_0 = 3$

Ejercicio n° 10:

Sea el pulso rectangular:



a) Grafique el espectro de amplitud para k=3 , k=5, k=10

b) ¿Qué conclusiones puede sacar?

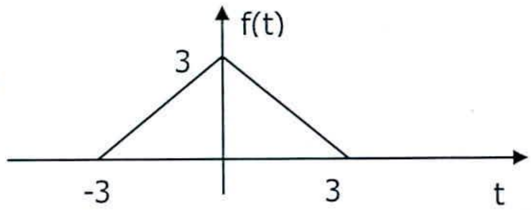
PARTE 3: TRANSFORMADA DE FOURIER

Ejercicio n° 11:

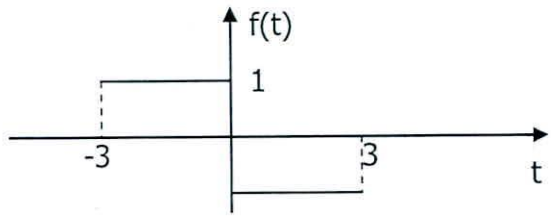
Halle las Transformadas de Fourier de las siguientes funciones y dibuje su espectro continuo de amplitud:

a) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < 3 \\ 0 & \text{si } |t| > 3 \end{cases}$ b) $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

c)



d)



e) $f(x) = x$ si $0 \le x \le 5$ y $f(x) = 0$ en caso contrario.

f) $f(x) = 3 - x$ si $0 \le x \le 3$ y $f(x) = 0$ en caso contrario.

Ejercicio n° 12:

En base al ejercicio anterior(parte a), calcule el valor de la integral: $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x}\, dx$

PARTE 4: EJERCICIOS VARIOS

Ejercicio n° 13:

Desarrolle $f(t) = \text{sen}^5 t$ en S.T.F. (Sugerencia: desarrolle Binomio de Newton)

Ejercicio n° 14:

Analice la validez de las siguientes afirmaciones, justificando su respuesta:

a) El desarrollo en S.T.F. de la función $f(t) = |t| - 3$ para $t \in (-6,6)$ y $f(t)=f(t+12)$ sólo tiene términos con cosenos de frecuencias pares.

b) Los coeficientes c_n del desarrollo en S.E.F. de la función anterior son todos reales.

c) El desarrollo en S.T.F. de la función $f(t) = |t-2|$ para $t \in (0,4)$ y $f(t)=f(t+4)$ sólo tiene términos con frecuencias impares.

d) Los coeficientes c_n del desarrollo en S.E.F. de la función anterior son imaginarios puros.

e) Si el desarrollo en S.T.F. de una función f(t) sólo tiene términos con frecuencias impares, entonces f(t) tiene simetría de media onda.

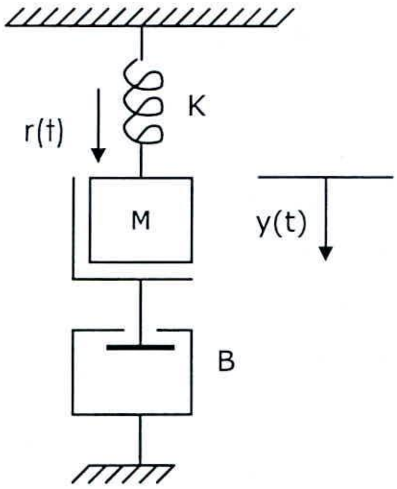
f) Si el desarrollo en S.T.F. de una función f(t) no tiene términos con cosenos, entonces f(t) es una función impar.

g) Sean f y g funciones periódicas con dominio en R. Si el desarrollo en Serie de Fourier de f es el mismo que el de g, entonces $f(t) = g(t) \ \forall \, t \in R$

h) Al desarrollar la función $f(t) = \text{sen}(\pi\, t)$ si $t \in (0,1)$ y $f(t)=f(t+1)$ en Serie Exponencial de Fourier sólo hay términos con coeficientes reales.

Ejercicio n° 15:

Consideremos las **oscilaciones forzadas** de un cuerpo de masa M suspendido de un resorte son regidas por la ecuación diferencial: $M\, y'' + B\, y' + K\, y = r(t)$ (1)



donde K es la constante elástica del resorte y B es el factor de amortiguamiento.
Si la fuerza externa es senoidal o cosenoidal, y el coeficiente $B \neq 0$, entonces la solución de estado estacionario representa una oscilación armónica que tiene la misma frecuencia que la fuerza externa.
En cambio, si la fuerza externa r(t) no es senoidal, sino es cualquier otra función periódica, entonces la solución de estado estacionario representa una superposición de oscilaciones armónicas que tienen la frecuencia de r(t) y sus múltiplos.

Si la frecuencia de una de estas oscilaciones está cercana a la resonante del sistema vibrante, entonces esa oscilación será la parte dominante de la respuesta del sistema a la fuerza externa.

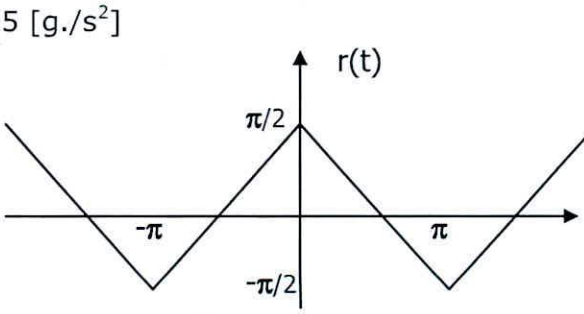
Caso particular:

(extraído de la bibliografía : Matemáticas Avanzadas para Ingeniería. Kreyszig)

Sea M= 1 [g.] B = 0.02 [g./s] K= 25 [g./s^2]

$$r(t) = \begin{cases} t + \pi/2 & \text{si } -\pi < t < 0 \\ -t + \pi/2 & \text{si } 0 < t < \pi \end{cases}$$

$\wedge \quad r(t+ 2\pi) = r(t)$



Entonces la ecuación (1) queda: $y'' + 0.02\, y' + 25\, y = r(t)$

Se pide: hallar la respuesta de estado estacionario y(t).

EJERCICIOS PARA MARCAR LA RESPUESTA CORRECTA, tomados en Finales:

☑ Ejercicio n° 16:

Marcar la única respuesta correcta de cada ítem:

1.	De las siguientes funciones, la que tiene la S.T.F. sólo de cosenos con valor medio distinto de 2 es: a) $f_1(t) = t^2$ si $t \in (0,2)$ $\wedge$ $f_1(t) = f_1(t+2)$ b) $f_2(t) = t$ si $t \in (0,6)$ $\wedge$ $f_2(t)= f_2(t+6)$ c) $f_3(t) = t$ si $t \in (0,4)$ $\wedge$ $f_3(t) = -t$ si $t \in (-4,0)$ $\wedge$ $f_3(t)= f_3(t+8)$ d) $f_4(t) = 3$ si $t \in (-1,1)$ $\wedge$ $f_4(t) = 1$ si $1<\vert t\vert< 3$ $\wedge$ $f_4(t) = f_4(t+6)$
2.	De las siguientes funciones, la que tiene la S.E.F. con coeficientes reales y sólo de frecuencias impares es: a) $f_1(t) = t^2$ si $t \in (-2,2)$ $\wedge$ $f_1(t) = f_1(t+4)$ b) $f_2(t) = t$ si $t \in (0,4)$ $\wedge$ $f_2(t)= f_2(t+4)$ c) $f_3(t) = t$ si $t \in (0,4)$ $\wedge$ $f_3(t) = -t$ si $t \in (-4,0)$ $\wedge$ $f_3(t)= f_3(t+8)$ d) $f_4(t) = 3$ si $t \in (-1,1)$ $\wedge$ $f_4(t) = 1$ si $1<\vert t\vert< 3$ $\wedge$ $f_4(t) = f_4(t+6)$
3.	La función $f(t) = t$ en $(0,2)$ y $f(t) = f(t+2)$ tiene su S.T.F. : a) sólo con senos b) sólo con cosenos c) con valor medio 1 d) Ninguna de las anteriores
4.	Los coeficientes de la Serie Exponencial de Fourier de $f(x) = x^2$ en $(0,1)$ $\wedge$ $f(x) = f(x+1)$ son: a) todos reales b) todos imaginarios puros c) uno real y los demás imaginarios d) ninguna es correcta
5.	La función $f(t) = e^{\vert t\vert}$ en $[-1,1]$ y $f(t) = f(t+2)$ tiene su desarrollo en S.T.F.: a) con valor medio nulo b) sólo frecuencias impares c) sin términos con senos d) sólo frecuencias pares

6.	La serie trigonométrica de Fourier de $f(x) = 2\,\text{sen}(x)\cos(x)$ es: a) la misma función b) Una serie con infinitos términos no nulos en senos c) Un sólo término d) Una serie con infinitos términos no nulos en cosenos
7.	Dada $f(t) = t^2$ si $t \in (0,1)$ $\wedge$ $f(t) = 2 - (t-2)^2$ si $t \in (1,2)$ $\wedge$ $f(t) = f(t+2)$ entonces su STF es: a) sin cosenos b) con valor medio $a_0/2 = 0$ c) sólo de cosenos d) sólo de frecuencias impares
8.	La serie trigonométrica de Fourier: $S(x) = 1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(n\frac{\pi}{2}x)$ puede corresponder a: a) $f(x) = 2 - \lvert x \rvert$ si $x \in (-2,2)$ $\wedge$ $f(x) = f(x+4)$ b) $f(x) = x^2$ si $x \in (-2,2)$ $\wedge$ $f(x) = f(x+4)$ c) $f(x) = x$ si $x \in (0,4)$ $\wedge$ $f(x) = f(x+4)$ d) ninguna de las anteriores
9.	Dada la función: $f(x) = x + 1$ en $[0, 1)$, para que tenga simetría de media onda con periodo $T=2$ hay que definirla en $[1, 2)$: a) $x + 1$ b) $-x$ c) $-x - 1$ d) $-x + 1$
10.	La señal: $f(x) = x^2 - 2$ si $x \in [0;2)$ y $f(x) = f(x+2)$ tiene su Serie Trigonométrica de Fourier: a) con valor medio negativo b) sólo de senos c) tal que $S(2) = -2$ d) ninguna de las anteriores

RESPUESTAS EJERCICIOS DE FOURIER:

☑ Ej. 1:

a) $S(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4}{n}\pi \,\operatorname{sen}(nx)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

c) $S(t) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nt)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

☑ Ej. 2:

a) $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi}\operatorname{sen}[(2k+1)\,\frac{\pi}{3}x]$

b) $S(t) = 3 + \frac{12}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\cos[(2k+1)\,\frac{\pi}{4}t]$

c) $S(t) = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$

d) $S(t) = 20 - \frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{5}$

☑ Ej. 3:

a) $f(t) = t + 2$ en $(-4,0)$

b) $S(t) = \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\left[\frac{(2k-1)\pi n t}{4}\right]$

c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

☑ Ej. 4:

i) a) $S(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(1-4n^2)\pi}\cos(2nx)$

b) $S(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-8}{(2k+1)^2\pi^2}\cos[(2k+1)\,\frac{\pi}{2}x]$

c) $S(t) = \cos(t)$

d) $S(t) = e - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(e(-1)^n - 1)}{1+n^2\pi^2}\cos(n\,\pi\, t)$

ii) a) $S(x) = \operatorname{sen}(x)$

b) $S(x) = -4 \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n\,\pi}\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{2}x)$

c) $S(t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\operatorname{sen}(2nt)}{4n^2-1}$

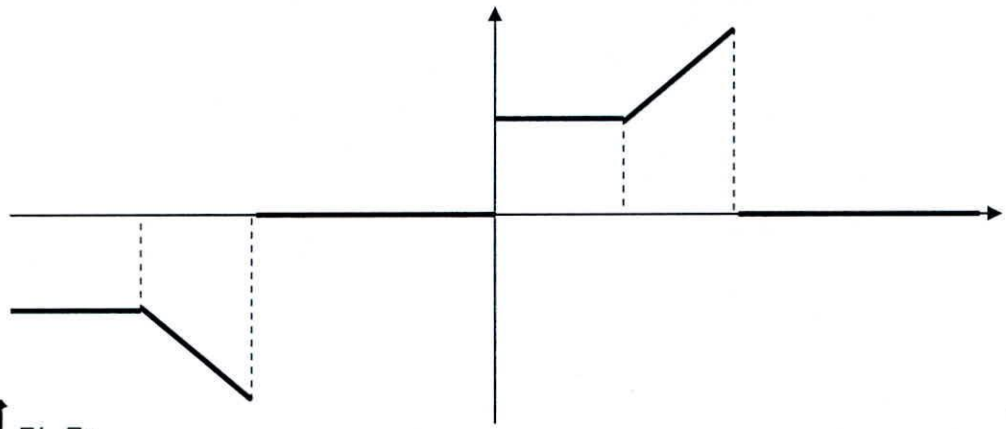
d) $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi(1-e(-1)^n)}{1+n^2\pi^2}\operatorname{sen}(n\,\pi\, t)$

Ej. 5:

a) Aparecen solamente términos con senos porque la función es impar.
b) Sólo aparecen términos con frecuencias impares ya que la función tiene simetría de madia onda.

Ej. 6:

Para que tenga simetría de media onda debe completarse de la siguiente forma:



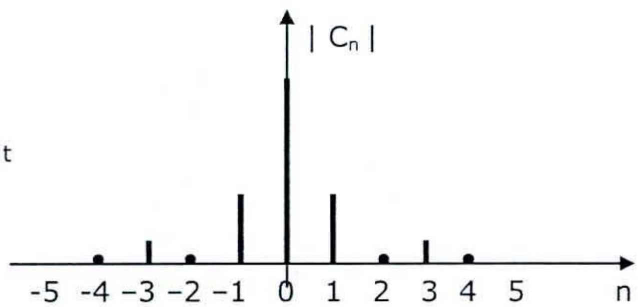
Ej. 7:

a) Si una función es par y además tiene simetría de media onda, serán nulos todos los términos con senos y los de frecuencias pares de cosenos.

b) La función no puede ser par ni impar, ya que la Serie tienen tanto términos con senos y con cosenos.

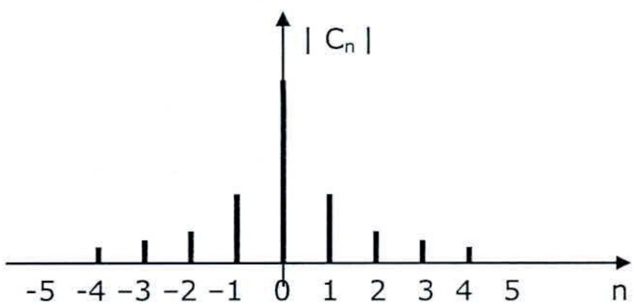
Ej. 8:

a) $f(t) = \dfrac{1}{5} + \sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \dfrac{\text{sen}(n\frac{\pi}{5})}{n\,\pi}\, e^{j(n\,w\,x)}$



b) $S(t) = 1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dfrac{-4}{(2k+1)^2\pi^2}\, e^{j(2k+1)\,\frac{\pi}{2}t}$

c) $S(t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2j}{n\pi}\, e^{jn\pi t} - \dfrac{2j}{n\pi}\, e^{-jn\pi t}$



Ej. 9:

a) f se debe completar de forma impar y con simetría de media onda:

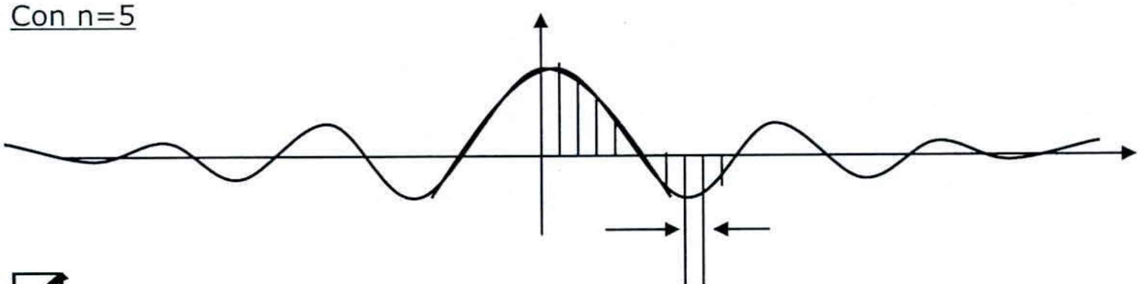
$f(t) = -(t+2)^2$ en $(-2,-1)$ $\wedge$ $f(t) = -t^2$ en $(-1,0)$ $\wedge$ $f(t) = (t-2)^2$ en $(1,2)$

b) Por ejemplo: $f(x) = 2x + 1$ en $(0,2)$ $\wedge$ $f(x) = f(x+2)$

Ej. 10:

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{k})}{n\frac{\pi}{k}} e^{j(nwx)}$$

Con n=5



Ej. 11:

a) $G(w) = 2\,\dfrac{\operatorname{sen}(3w)}{w}$

b) $G(w) = \dfrac{1}{1+jw}$

c) $G(w) = -2\,\dfrac{\cos(3w)}{w^2}$

d) $G(w) = -4\,\dfrac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}w\right)}{jw}$

e) $G(w) = -\dfrac{5\,e^{-j5w}}{jw} + \dfrac{e^{-j5w}-1}{w^2}$

f) $G(w) = \dfrac{3}{jw} + \dfrac{1-e^{-j3w}}{w^2}$

Ej. 12: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

Ej. 13:

$$\operatorname{sen}^5(t) = \frac{5}{8} \bullet \operatorname{sen}(t) - \frac{5}{16} \bullet \operatorname{sen}(3t) + \frac{1}{16} \bullet \operatorname{sen}(5t)$$

Ej. 14:

a) FALSO b) VERDADERO c) VERDADERO d) FALSO

e) FALSO f) FALSO g) FALSO h) VERDADERO

☑ Ej. 15:

Se representa r(t) por medio de Serie de Fourier:

$$r(t) = \frac{4}{\pi}\left(\cos(t) + \frac{1}{3^2}\cos(3t) + \frac{1}{5^2}\cos(5t) + \bullet\bullet\bullet \right) \qquad (2)$$

Con lo cual r(t) ha quedado descompuesta en una suma de fuerzas senoidales. Vamos a calcular por separado la respuesta a cada una de estas oscilaciones:

$$y'' + 0.02\, y' + 25\, y = \frac{4}{n^2\pi}\cos(nt) \qquad \text{con } n = 1\,,\,3\,,\,5\,,\,\ldots \qquad (3)$$

Observar que el segundo miembro es un solo término de la serie.

La respuesta será de la forma: $y_n = A_n \cos(nt) + B_n \operatorname{sen}(nt)$

Sustituyendo en (3), se despeja:

$$[- n^2 A_n \cos(nt) - n^2 B_n \operatorname{sen}(nt)\,] + 0.02\,[- n\, A_n \operatorname{sen}(nt) + n\, B_n \cos(nt)] + 25\,[A_n \cos(nt) + B_n \operatorname{sen}(nt)] = \frac{4}{n^2\pi}\cos(nt)$$

$$\Rightarrow\ [- n^2 A_n + 0.02\, n\, B_n + 25\, A_n] \cos(nt) + [- n^2 B_n - 0.02\, n\, A_n + 25\, B_n]\ \operatorname{sen}(nt) = \frac{4}{n^2\pi}\cos(nt)$$

$$\Rightarrow\ (25 - n^2)\, A_n + 0.02\, n\, B_n = \frac{4}{n^2\pi} \ \wedge\ (25 - n^2)\, B_n - 0.02\, n\, A_n = 0$$

Por Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 25-n^2 & 0.02n \\ -0.02n & 25-n^2 \end{vmatrix} = (25 - n^2)^2 + (0.02n)^2$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} \frac{4}{n^2\pi} & 0.02n \\ 0 & 25-n^2 \end{vmatrix} = \frac{4}{n^2\pi}(25 - n^2) \qquad \Rightarrow A_n = \frac{4}{n^2\pi\Delta}(25 - n^2)$$

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 25-n^2 & \frac{4}{n^2\pi} \\ -0.02n & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{n^2\pi}\ 0.02\, n = \frac{0.08}{n^2\pi} \quad \Rightarrow\ B_n = \frac{0.08}{n^2\pi\Delta}$$

Como la Ecuación Diferencial es Lineal, la solución en estado estacionario puede obtenerse como suma de las oscilaciones anteriores:

$y = y_1 + y_3 + y_5 + \ldots$

La amplitud de cada oscilación es: $C_n = \sqrt{A_n^{\ 2} + B_n^{\ 2}} = \dfrac{4}{n^2 \pi \sqrt{\Delta}}$

Los valores numéricos de las primeras son:

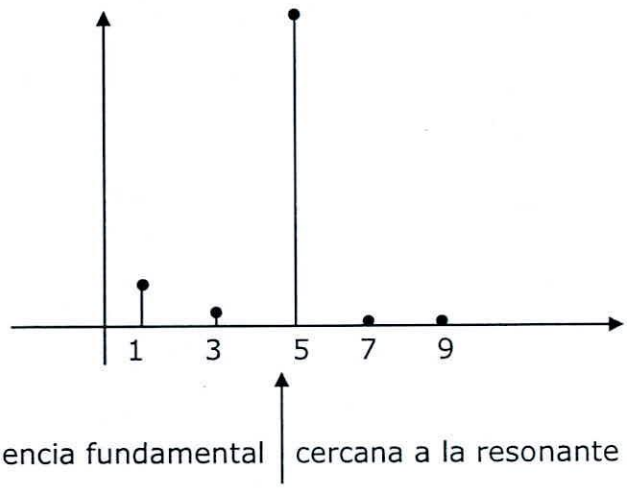
$C_1 = 0.0530$

$C_3 = 0.0088$

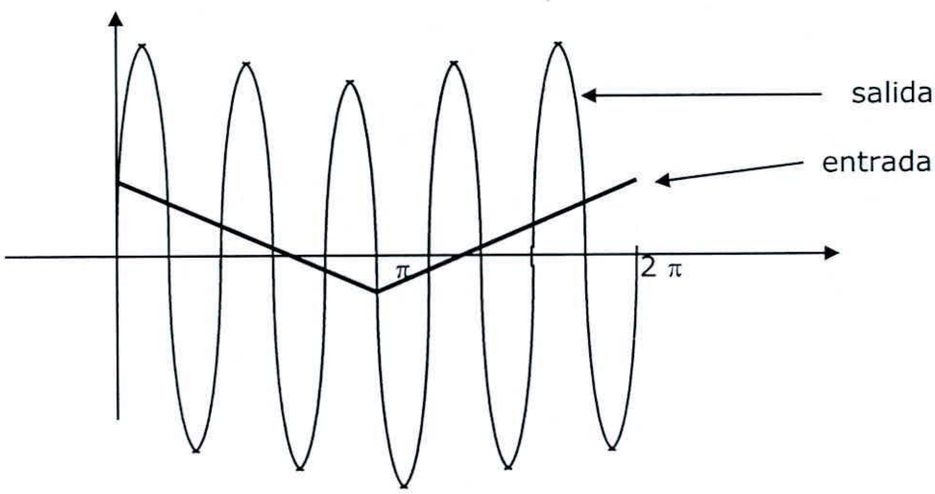
$C_5 = 0.5100$

$C_7 = 0.0011$

$C_9 = 0.0003$



O sea, que la respuesta en estado estacionario es CASI una oscilación armónica cuya frecuencia es 5 veces mayor que la de la fuerza excitadora externa.



☑ Ej. 16:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	c	c	d	c	c	a	a	b	a

EJERCITACION

TRANSFORMADA DE LAPLACE

PARTE 1: TRANSFORMADA DIRECTA DE LAPLACE - PROPIEDADES

☑ Ejercicio n° 1:

Calcule las Transformadas de Laplace de las siguientes funciones, utilizando la tabla y la propiedad de linealidad:

a) $y(t) = 3 + 5\,t - 2\,t^2 + t^3 \quad ; t>0$

b) $y(t) = \frac{1}{4}\,(e^{4t} - 1) \quad ; t>0$

c) $y(t) = \frac{1}{a^2}\,(e^{at} - at - 1) \; ; t>0$

d) $y(t) = 4\cos(3t) - 5\,\mathrm{sen}(2t) \; ; \; t>0$

☑ Ejercicio n° 2:

Utilizando las propiedades de la Transformada de Laplace halle $\mathcal{L}[f(t)]$

a) $f(t) = t^2\,e^{4t} \; ; t>0$

b) $f(t) = 5\,e^{-5t}\cos(3t) \; ; t>0$

c) $f(t) = e^{-t}\,t\,\mathrm{sen}(2t) \; ; t>0$

d) $f(t) = (t-1)^4 \; ; \; t>1$

e) $f(t) = e^{-2t}\,\mathrm{sen}(2t) + t^2\,e^{3t} \; ; t>0$

f) $f(t) = 2\,t^2\,e^{-t} - t + \cos(4t)$

☑ Ejercicio n° 3:

Calcule las Transformadas de Laplace aplicando adecuadamente alguna propiedad conveniente o algún paso algebraico:

a) $y(t) = \frac{1}{a^2} \; ; \; 0 < t < a$

b) $y(t) = \mathrm{sen}\,(5t + \pi/3) \; ; t>0$

c) $y(t) = \cos^3(t) \quad ; t > 0$

d) $y(t) = a^t \quad ; t > 0 \; ; a \in R^+$

e) $y(t) = (t-1)^4 \quad ; t > 0$

f) $y(t) = \mathrm{sen}(5t)\cos(2t) \; ; t > 0$

☑ Ejercicio n° 4:

Sea $f(t) = k\,\mathrm{sen}(2t+\frac{\pi}{6})$. Determine el valor de k sabiendo que $\lim\limits_{s\to\infty} s\,F(s) = 4$

Recuerde el Teorema de valor inicial.

PARTE 2: ANTITRANSFORMADA DE LAPLACE - PROPIEDADES

Ejercicio n° 5:

Calcule las Antitransformadas de Laplace de las siguientes funciones:

a) $Y(s) = \frac{25}{s^3}$ b) $Y(s) = \frac{8}{s^2+3}+\frac{1}{s}$ c) $Y(s) = \frac{12}{s-3}-\frac{8s}{s^2+4}$ d) $Y(s) = \frac{-1}{s+3}$

e) $Y(s) = \frac{6}{(s-1)^4}$ f) $Y(s) = \frac{s+3}{s^2+6s+13}$ g) $Y(s) = \frac{s-1}{s^2+2s+2}$ h) $Y(s) = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$

Ejercicio n° 6:

Calcule las Antitransformadas de Laplace de las siguientes funciones previamente separando en fracciones simples:

a) $F(s) = \frac{s+7}{s^2-6s+5}$ b) $F(s) = \frac{s^2+2s+2}{s^2+3s+2}$ c) $F(s) = \frac{1}{(s+2)^2(s+1)}$

d) $F(s) = \frac{s^2+9s+19}{(s+1)(s+2)(s+4)}$ e) $F(s) = \frac{2\,e^{-0.5s}}{s^2+6s+3}$ f) $F(s) = \frac{6s^2-13s+12}{s(s-1)(s-6)}$

g) $s^2\,F(s) - 4\,F(s) = \frac{s}{s+1}$ h) $F(s) = \frac{7s^2-41s+84}{(s-1)(s^2-4s+13)}$

i) $F(s) = \frac{-2s^2+8s-14}{(s+1)(s^2-2s+5)}$ j) $F(s) = \frac{(4s+2)\,e^{-2s}}{(s-1)(s+2)}$

Ejercicio n° 7:

a) Aplicando el Teorema de valor Final, halle el valor de f(t) para $t \to \infty$, siendo:

$F(s) = \frac{10}{s^2+s}$ Verifique el resultado obtenido.

b) Dada: $F(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$ halle f(0) por Teorema del valor inicial. Verifique los resultados obtenidos.

c) Dada $F(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s}$, halle el valor de f(t) para: i) t= 0 ii) t= ∞ iii) t= 0.5

Verifique i) y ii) con los Teoremas de Valor inicial y final.

PARTE 3: RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Ejercicio n° 8:

Resuelva las siguientes Ecuaciones Diferenciales por Transformada de Laplace:

a) $2\,x''(t) + 7\,x'(t) + 3\,x(t) = 6$ con $x(0)=0 \wedge x'(0)=0$

b) $x''(t) + 3\,x'(t) + 6\,x(t) = 2$ con $x(0)=0 \wedge x'(0)=0$

c) $3\,y'(t) + 5\,y(t) = 6$ con $y(0)=0$

d) $x'(t) + x(t) = e^{-2t}$ con $x(0)=0$

e) $y''(t) + 4\,y'(t) + 4\,y(t) = 3\,x'(t) + 2\,x(t)$ con $x(t) = e^{-5t} \wedge y(0)=0 \wedge y'(0)=0$

f) $y''(t) + 6\,y'(t) + 18\,y(t) = 13\,e^{-5t}$ con $y(0)=1 \wedge y'(0)=-2$

g) $y''(t) - 2\,y'(t) + 5\,y(t) = -8\,e^{-t}$ con $y(0)=2 \wedge y'(0)=12$

h) $y''(t) - 3\,y'(t) + 2\,y(t) = \cos(t)$ con $y(0)=0 \wedge y'(0)=-1$

i) $y''(t) + 9\,y(t) = \cos(2t)$ con $y(0)=1 \wedge y(\frac{\pi}{2})=-1$

OPTATIVO: $y''(t) + 3\,y'(t) + 2\,y(t) = t\,\text{sen}(2t)$ con $y(0)=0 \wedge y'(0)=0$

Ejercicio n° 9:

Resuelva los siguientes sistemas de Ecuaciones Diferenciales por medio de la Transformada de Laplace:

a) $\begin{cases} y'(t) - \frac{1}{2}\,x(t) = 1 \\ x'(t) + 2\,y(t) = 2t \end{cases}$ con $x(0) = 0,\ y(0) = 0$

b) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = 2\,x(t) + 4\,y(t) \end{cases}$ con $x(0) = -1,\ y(0) = 0$

c) $\begin{cases} x'(t) + 2\,y(t) = 0 \\ x'(t) - y'(t) = 0 \end{cases}$ con $x(0) = -1,\ y(0) = 2$

d) $\begin{cases} x'(t) + 2y'(t) + 5x(t) = 0 \\ y'(t) + y(t) + 2x(t) = 0 \end{cases}$; $y(0)=1 \wedge x(0)=0$

e) $\begin{cases} 2\,x'(t) - y'(t) = 4\,t - 3 \\ x'(t) = y(t) - t \end{cases}$; $y(0)=2 \wedge x(0)=1$

OPTATIVO:

$\begin{cases} y'(t) + 2\,z'(t) = t \\ y''(t) - z(t) = e^{-t} \end{cases}$ con $y(0) = 3,\ y'(0) = -2,\ z(0) = 0$

PARTE 4: CONVOLUCION

☑ Ejercicio n° 10:

Halle $\mathcal{L}\left[\int_0^t u\cos(u)\, e^{(t-u)}\, du\right]$ utilizando el Teorema de Convolución.

☑ Ejercicio n° 11:

Antitransforme utilizando Convolución:

a) $Y(s) = \dfrac{6}{(s+1)(s^2+4)}$ b) $Y(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^2}$ c) $Y(s) = \dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}$

☑ Ejercicio n° 12:

Resuelva las siguientes ecuaciones integrales e integrodiferenciales por medio de la Transformada de Laplace, utilizando el Teorema de Convolución:

a) $y(t) + 4\int_0^t (t-u)^2\, y(u)\,du = t^2$ b) $y(t) = t + 2\int_0^t \cos(t-u)\, y(u)\,du$

c) $\int_0^t y(u)\,(t-u)\,du = \dfrac{t}{2} - \dfrac{\text{sen}(2t)}{4}$ d) $y(t) = \int_0^t y(u)\,du + \cos(t)$

e) $\int_0^t y(u)\,(t-u)\,du + y'(t) = \dfrac{t^4}{12} + t + 1$ con $y(0) = -1$

f) $y'(t) = 1 - \int_0^t y(u)\,e^{2(t-u)}\,du$ con $y(0) = 1$

PARTE 5: EVALUACION DE INTEGRALES

☑ Ejercicio n° 13:

Calcule el valor de las siguientes integrales utilizando Transformada de Laplace:

a) $\int_0^\infty t^3\, e^{-t}\,\text{sen}(t)\,dt$ b) $\int_0^\infty e^{-3t}\, t\,\text{sen}(t)\,dt$ c) $\int_0^\infty t^2\, e^{-2t}\,dt$

d) $\int_0^\infty \dfrac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t}\,dt$ e) $\int_0^\infty t\, e^{-2t}\cos(4t)\,dt$

EJERCICIOS PARA MARCAR LA RESPUESTA CORRECTA, tomados en Finales:

☑ Ejercicio n° 14:

Marcar la única respuesta correcta de cada ítem:

1.	Sabiendo que $g(t) = e^{5t} f(t)$ entonces: a) $\lim_{s \to \infty} s\, F(s) = \lim_{s \to \infty} s\, G(s)$ b) $\mathcal{L}[f(t)] = G(s-5)$ c) $\mathcal{L}[g(t)] = F(s) \bullet \frac{1}{s-5}$ d) Ninguna es correcta
2.	Sabiendo que $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \wedge G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ entonces: a) $\mathcal{L}[f(t) \bullet g(t)] = F(s) \bullet G(s)$ b) Si $f(t) = \delta(t)$ entonces $F(s) \bullet G(s) = G(s)$ c) Si $f(t) = 1$ entonces $F(s) \bullet G(s) = G(s)$ d) ninguna de las anteriores
3.	Sea $f(t) = t$ si $t \in [0,1]$ y $f(t) = 0$ si $t \notin [0,1]$ Entonces: a) No existe transformada de Laplace de f(t) b) $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2}$ c) $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2}(1-e^{-s}) - \frac{e^{-s}}{s}$ d) $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2}(1-e^{-s})$
4.	La solución de la ecuación: $y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 3e^{t}\,\mathrm{sen}(t)$ con $y(0) = 0 \wedge y'(0) = 1$ es: a) $y(t) = e^{-2t}[\cos(t) + \mathrm{sen}(t)]$ b) $y(t) = e^{2t}\,\mathrm{sen}(t)$ c) $y(t) = e^{t}\,\mathrm{sen}(t)$ d) ninguna de las anteriores
5.	La antitransformada de Laplace de : $Y(s) = 2(s^2+1)^{-2}$ es: a) $y(t) = 2\,\mathrm{sen}^2(t)$ b) $y(t) = \mathrm{sen}(t) - t\cos(t)$ c) $y(t) = 2t\,\mathrm{sen}(t)$ d) ninguna de las anteriores
6.	El valor de la integral $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-6t}}{t}\,dt$ es: a) 0 b) ln(2) c) ln(3) d) ninguna de las anteriores

7.	La Transformada de Laplace de $f(t) = 3\,\delta(t) + t$ cuando $s \to \infty$, tiende a: a) cero b) tres c) infinito d) ninguna de las anteriores
8.	Sea $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ tal que $F(s)=\dfrac{3s^2+9}{2s^3-23s^2+43s-42}$ El valor de f(0) es: a) 0 b) 3/2 c) 3 d) infinito
9.	El valor de la integral $\int_0^\infty \operatorname{sen}(2t)t^2 e^{-3t}\,dt$ es: a) 0 b) $\dfrac{2}{13}$ c) $\dfrac{92}{2197}$ d) ninguna de las anteriores
10.	La Transformada de Laplace de $f(t) = -5\,e^{2t} + 2\cos(t)\,e^{3t} - 19\operatorname{sen}(t)\,e^{3t}$ es: a) $\dfrac{-3s^2+s}{(s-2)(s^2-6s+10)}$ b) $\dfrac{s^2-4s-5}{s^3-7s^2+17s+25}$ c) $\dfrac{6s+3}{s^3+4s^2+13s}$ d) ninguna de las anteriores
11.	El valor de la integral: $\int_0^\infty e^{-t}\dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt$ es: a) 0 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{\pi}{4}$ d) infinito

RESPUESTAS EJERCICIOS DE TRANSFORMADA DE LAPLACE:

Ej. 1:

a) $Y(s) = \frac{3}{s} + \frac{5}{s^2} - \frac{4}{s^3} + \frac{6}{s^4}$; b) $Y(s) = \frac{1}{s(s-4)}$; c) $Y(s) = \frac{1}{s^2(s-a)}$

d) $Y(s) = \frac{4s}{s^2+9} - \frac{10}{s^2+4}$

Ej. 2:

a) $F(s) = \frac{2}{(s-4)^3}$; b) $F(s) = 5 \bullet \frac{s+5}{s^2+10s+34}$; c) $F(s) = \frac{4s+4}{((s+1)^2+4)^2}$

d) $F(s) = \frac{24}{s^5} \bullet e^{-s}$; e) $F(s) = \frac{2}{(s+2)^2+4} + \frac{2}{(s-3)^3}$; f) $F(s) = \frac{4}{(s+1)^3} - \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+16}$

Ej. 3:

a) $Y(s) = \frac{1-e^{-as}}{a^2 s}$ b) $Y(s) = \frac{s\sqrt{3}+5}{2(s^2+25)}$ c) $Y(s) = \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+9} + \frac{3}{4}\frac{s}{s^2+1}$

d) $Y(s) = \frac{1}{s-\ln(a)}$ e) $Y(s) = \frac{24}{s^5} - \frac{24}{s^4} + \frac{12}{s^3} - \frac{4}{s^2} + \frac{1}{s}$ f) $Y(s) = \frac{5s^2+105}{(s^2+49)(s^2+9)}$

Ej. 4: $k = 8$

Ej. 5:

a) $y(t) = \frac{25}{2} t^2$ b) $y(t) = \frac{8}{\sqrt{3}} \text{sen}(\sqrt{3}\,t) + 1$ c) $y(t) = 12\, e^{3t} - 8\cos(2t)$

d) $y(t) = -\,e^{-3t}$ e) $y(t) = t^3 e^t$ f) $y(t) = \cos(2t)\, e^{-3t}$

g) $y(t) = \cos(t)\, e^{-t} - 2\,\text{sen}(t)\, e^{-t}$ h) $y(t) = t\,\text{sen}(2t)$

Ej. 6:

a) $f(t) = -2\, e^t + 3\, e^{5t}$ b) $f(t) = \delta(t) + e^{-t} - 2\, e^{-2t}$

c) $f(t) = -e^{-2t} - t\, e^{-2t} + e^{-t}$ d) $f(t) = \frac{11}{3} e^{-t} - \frac{5}{2} e^{-2t} - \frac{1}{6} e^{-4t}$

e) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-(3-\sqrt{6})(t-0.5)} - \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-(3+\sqrt{6})(t-0.5)}$ f) $f(t) = 2 - e^t + 5\, e^{6t}$

g) $f(t) = \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{6} e^{2t}$ h) $f(t) = 5\, e^t + 2\, e^{2t}\cos(3t) - 5\, e^{2t}\,\text{sen}(3t)$

i) $f(t) = -3\, e^{-t} + e^t\cos(2t) + e^t\,\text{sen}(2t)$ j) $f(t) = 2\, e^{t-2} + 2\, e^{-2(t-2)}$

Ej. 7:

a) $\lim_{t\to\infty} f(t) = 10$ b) $\lim_{t\to 0} t\, e^{-2t} = 0$

c) i) $f(0) = 2$ ii) $\lim_{t\to\infty} f(t) = \frac{1}{2}$ iii) $f(0.5) = \frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-1}$

Ej. 8:

a) $x(t) = 2 - \frac{12}{5} e^{-0.5t} + \frac{2}{5} e^{-3t}$

b) $x(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cos(\frac{\sqrt{15}}{2} t)\, e^{-3/2\, t} - \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{sen}(\frac{\sqrt{15}}{2} t)\, e^{-3/2\, t}$

c) $y(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5} e^{-5/3\, t}$

d) $x(t) = - e^{-2t} + e^{-t}$

e) $y(t) = \frac{-13}{9} e^{-5t} + \frac{13}{9} e^{-2t} - \frac{13}{3} t\, e^{-2t}$

f) $y(t)= e^{-5t} + \operatorname{sen}(3t)\, e^{-3t}$

g) $y(t) = - e^{-t} + 3 \cos(2t)\, e^{t} + 4 \operatorname{sen}(2t)\, e^{t}$

h) $y(t) = \frac{1}{10} \cos(t) - \frac{3}{10} \operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2} e^{t} - \frac{3}{5} e^{2t}$

i) $y(t) = \frac{1}{5} \cos(2t) + \frac{4}{5} \cos(3t) + \frac{4}{5} \operatorname{sen}(3t)$

OPTATIVO:

$$y(t)=-\frac{4}{25}e^{-t}\ \frac{1}{8}\ e^{-2t}+\frac{7}{200} \cos(2t)+\frac{3}{25} \operatorname{sen}(2t) -\frac{1}{20} t \operatorname{sen}(2t) -\frac{3}{20} t \cos(2t)$$

Ej. 9:

a) $x(t)=0$, $y(t)=t$

b) $x(t) = e^{3t} - 2 e^{2t}$, $y(t) = - 2 e^{3t} + 2 e^{2t}$

c) $x(t) = 2 e^{-2t} - 3$, $y(t) = 2 e^{-2t}$

d) $x(t) = \operatorname{sen}(2t)\, e^{-t}$ $y(t) = \cos(2t)\, e^{-t}$

e) $x(t) = e^{2t} + t^2$, $y(t) = 2 e^{2t} + 3 t$

OPTATIVO:

$$y(t)=2+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{3}{2}sen(t)+\frac{1}{2}\cos(t), \quad z(t)=1-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}sen(t)-\frac{1}{2}\cos(t)$$

Ej. 10:

$$Y(s) = \frac{s+1}{(s^2+1)^2}$$

Ej. 11:

a) $y(t) = \frac{3}{5}\,\text{sen}(2t) - \frac{6}{5}\cos(2t) + \frac{6}{5}\,e^{-t}$ b) $y(t) = \frac{1}{2}\text{sen}(t) - \frac{1}{2}\,t\cos(t)$

c) $y(t) = \frac{1}{2}\text{sen}(t) + \frac{1}{2}\,t\cos(t)$

Ej. 12:

a) $y(t) = \frac{1}{6}\,e^{-2t} - \frac{1}{6}\cos(\sqrt{3}\,t)\,e^{t} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{sen}(\sqrt{3}\,t)\,e^{t}$

b) $y(t) = 2 + t - 2\,e^{t} + 2\,t\,e^{t}$

c) $y(t) = \text{sen}(2t)$

d) $y(t) = \frac{1}{2}\,e^{t} + \frac{1}{2}\,\text{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t)$

e) $y(t) = t^2 - e^{-t}$

f) $y(t) = -2 + 3\,e^{t} - 2\,t\,e^{t}$

Ej. 13:

a) 0 b) $\frac{3}{50}$ c) ¼ d) ln(2) e) -0.03

Ej. 14:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	b	c	c	b	c	b	b	c	a	c

EJERCITACION

FUNCION TRANSFERENCIA Y SISTEMAS ESTABLES

PARTE 1: FUNCION TRANSFERENCIA - POLOS Y CEROS

Ejercicio n° 1:

Represente la constelación de polos y ceros de las siguientes funciones:

a) $G(s) = \dfrac{s}{s^2+2s+2}$

b) $G(s) = \dfrac{s(s-3)}{s^2+8s+25}$

c) $G(s) = \dfrac{1}{s(s+2)}$

d) $G(s) = \dfrac{s+2}{(s+4)(s^2+6s+18)}$

e) $G(s) = \dfrac{s^2-s}{(s^2+5s+6)(s-1)}$

f) $G(s) = \dfrac{s}{(s+2)^2}$

Ejercicio n° 2:

Sea $G(s) = \dfrac{k\,(s^2-4s-5)}{s^3-7s^2+17s+25}$ la transferencia de un sistema.

a) Halle $k \in \mathbb{R}^+ \,/\, |G(j)| = \sqrt{\dfrac{13}{5}}$

b) Indique los polos y ceros de G(s) y grafique la constelación.

Ejercicio n° 3:

Sea $G(s) = \dfrac{k\,(s^2-4s-5)}{s^3-3s^2-25s+75}$ la transferencia de un sistema.

a) Grafique la constelación de polos y ceros de G(s).

b) Halle $k \in \mathbb{R}^+$ sabiendo que $|G(j)| = 1$

c) Grafique <u>aproximadamente</u> $|G(s)|$ a lo largo del eje $\sigma = \mathrm{Re}[s]$.

Ejercicio n° 4:

Sea $G(s) = \dfrac{s(s+2)}{s^3+2s^2+9s+k}$ la transferencia de un sistema.

a) Halle $k \in \mathbb{R}$ sabiendo que 3j es un polo.

b) Grafique <u>aproximadamente</u> $|G(j\omega)|$.

☑ Ejercicio n° 5:

Sea $G(s) = \dfrac{s-3}{s^3 - s^2 - 4s + k}$ la transferencia de un sistema.

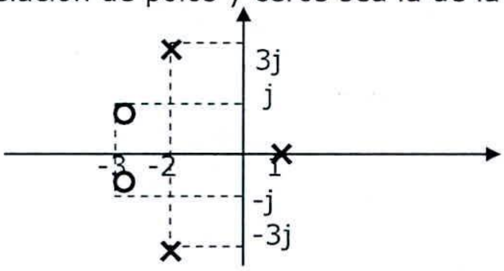
a) Halle $k \in \mathbb{R}$ sabiendo que s=3 no es cero.
b) Grafique aproximadamente $|G(j\omega)|$.

☑ Ejercicio n° 6:

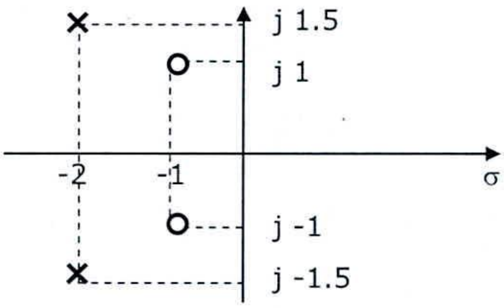
Construya funciones de transferencia que cumplan los siguientes requisitos:

a) que tenga exactamente los siguientes polos $p_1 = -2 + j$; $p_2 = -2 - j$; $p_3 = -1$ y los siguientes ceros: $z_1 = 3$; $z_2 = 0$

b) cuya constelación de polos y ceros sea la de la figura y además G(0) = -2:

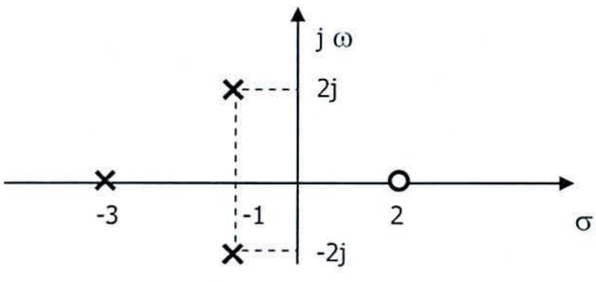


c) cuya constelación de polos y ceros sea la de la figura y G(0) = 8:

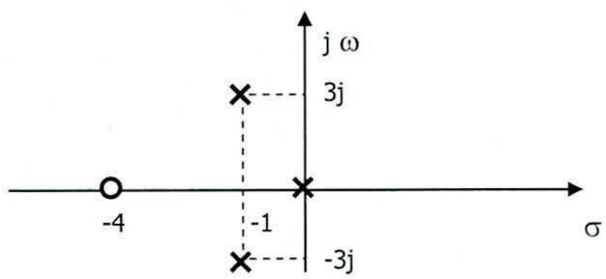


d) que tenga un único cero finito en -5, polos en -2+j y -2-j , que el grado del numerador sea 2 y que G(0)=1.

e) sabiendo que G(0) = -1/15 y su configuración de polos y ceros es:

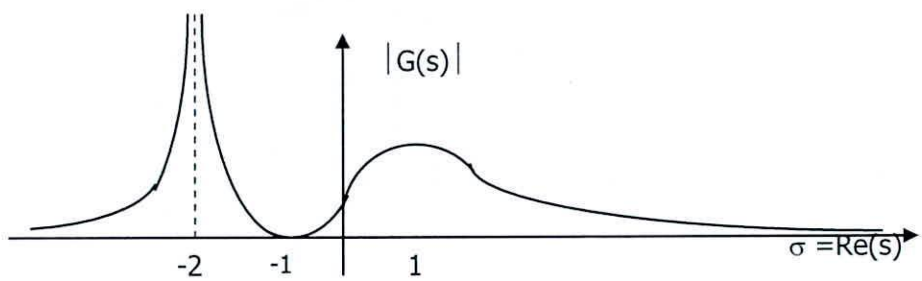


f) sabiendo que G(1) = 5 y su configuración de polos y ceros es:

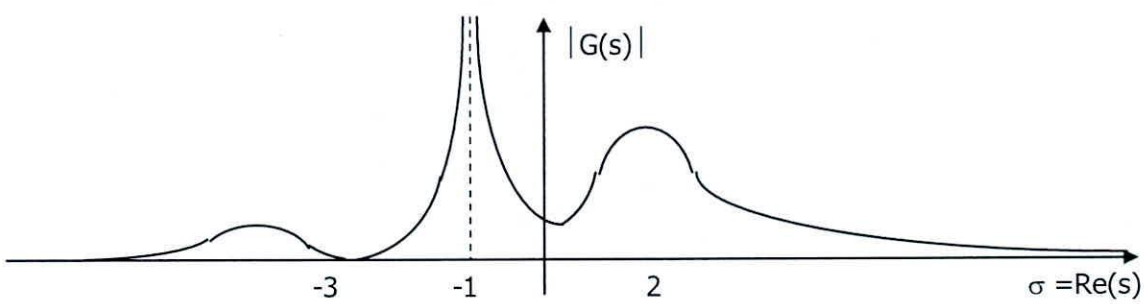


g) que tenga <u>coeficientes reales</u>, sabiendo que tiene un polo simple en s=-4+j, un polo simple en -1, un cero doble en -2 y que $|G(j)| = \sqrt{5/2}$

h) sabiendo que G(0) = 3/5 , G(1) = 1 y el corte de la misma con el eje real es:



i) sabiendo que G(0) = 3 , G(1) = 5 y el corte de la misma con el eje real es:



☑ Ejercicio n° 7:

Dada G(s) = $\mathcal{L}$ [g(t)] siendo g(t) = $e^{-3t} \bullet$ sen(at) .

a) Halle el valor de $a \in \mathbb{R}^+$ tal que uno de los polos de G(s) sea $p_1 = -3+j$.

b) Halle el otro polo.

PARTE 2: RESPUESTA DE SISTEMAS

☑ Ejercicio n° 8:

Sea $G(s) = \dfrac{s^2+3s+2}{s^3-2s^2-3s}$ la transferencia de un sistema. De acuerdo a la configuración de polos y ceros, indique el tipo de respuesta del mismo y si es un sistema estable.

☑ Ejercicio n° 9:

Dada la función de transferencia $G(s) = \dfrac{s^2+2s}{s^3-2s^2-3s}$

a) Grafique la constelación de polos y ceros de la función G(s).

b) Escriba la salida del sistema para una entrada $f(t) = e^{-2t}$

☑ Ejercicio n° 10:

Sea $G(s) = \dfrac{3s^2-6s-24}{s^3-3s^2-4s}$ la transferencia de un sistema.

a) Grafique la constelación de polos y ceros de G(s) e indique si el sistema es estable.

b) Halle módulo y fase de G(-1+j) por el método gráfico y por método analítico.

c) ¿Cuál será la respuesta del sistema si se lo excita con una señal $v_1(t) = e^{-t}$?

☑ Ejercicio n° 11:

Sea $G(s) = \dfrac{s^2-4s-5}{s^3-3s^2-25s+75}$ la transferencia de un sistema.

a) De acuerdo a la constelación de polos y ceros, indique si el sistema es estable.

b) ¿Cuál será la respuesta del sistema al impulso unitario $\delta(t)$?

☑ Ejercicio n° 12:

Sea $G(s) = \dfrac{2(s^2-5s-6)}{s^3-6s^2+4s-24}$ la transferencia de un sistema.

a) De acuerdo a la constelación de polos y ceros, indique si el sistema es estable.

b) ¿Cuál será la respuesta del sistema al escalón unitario E(t) ?

☑ Ejercicio n° 13:

Sea $y(t) = 5 - 5\,e^{-2t}\cos(3t)$ la salida o respuesta de un sistema a una entrada escalón E(t).

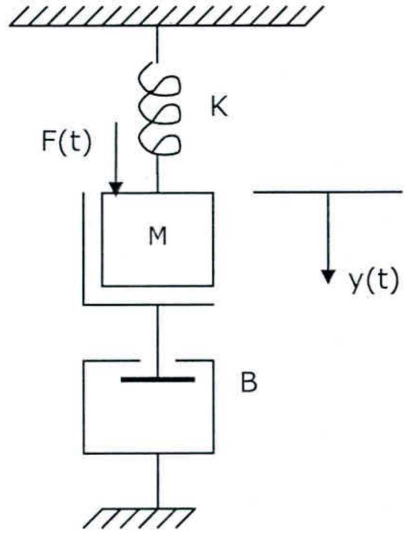
a) Indique la función transferencia G(s) correspondiente.

b) Haga el diagrama o constelación de polos y ceros y grafique <u>aproximadamente</u> el corte de $|G(s)|$ por el eje real.

PARTE 3: PROBLEMAS APLICADOS

Ejercicio n° 14:

Sea el sistema mecánico de la figura, que parte del reposo:



Donde:

K es la constante elástica del resorte o factor de dureza [N/m]

M es la masa [Kg.]

B es el factor de amortiguación [N s/m]

Fa es una fuerza externa aplicada al sistema [N]

$\delta(t)$ es la fuerza impulso unitario

y(t) es el desplazamiento [m]

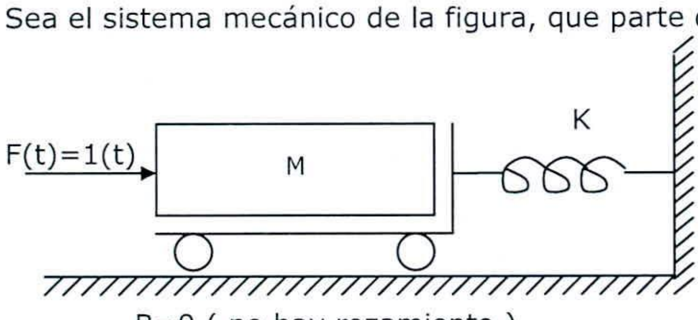
Hallar:

a) La ecuación diferencial correspondiente a la respuesta y(t) del sistema.
b) La función de Transferencia G(s) del sistema.
c) La respuesta del sistema (expresión de y(t)) siendo M=1,B=2,K=10 y $f(t) = \delta(t)$
d) La respuesta del sistema (expresión de y(t)) siendo M=1,B=2,K=10 y $f(t) = E(t)$
e) La respuesta del sistema (expresión de y(t)) siendo M=1,B=0,K=9 y $f(t) = \delta(t)$
f) La respuesta del sistema (expresión de y(t)) siendo M=1,B=5,K=6 y $f(t) = \delta(t)$

En todos los casos interprete la gráfica de la respuesta.

Ejercicio n° 15:

Sea el sistema mecánico de la figura, que parte del reposo:



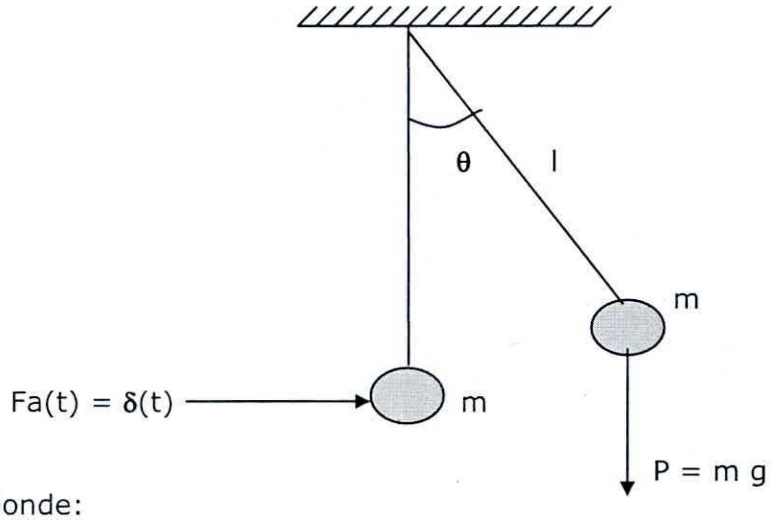
B=0 (no hay rozamiento)

Hallar:

a) La ecuación diferencial correspondiente al movimiento x(t) del sistema.
b) La función de transferencia del sistema.
c) La expresión de x(t) considerando $M=1 \wedge K=9$

Ejercicio n° 16:

Sea el péndulo ideal de la figura, que parte del reposo:



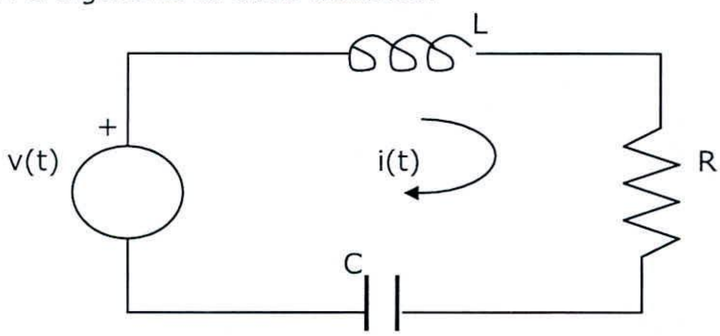
Donde:
l es la longitud del hilo del péndulo [m]
m es la masa [Kg.]
Fa es una fuerza externa aplicada al sistema [N]
$\delta(t)$ es la fuerza impulso unitario
θ es el ángulo correspondiente a la oscilación [rad]

Hallar:

a) La ecuación diferencial correspondiente al movimiento $\theta(t)$ del sistema.
b) La oscilación del sistema (expresión de $\theta(t)$)

Ejercicio n° 17:

En el siguiente circuito eléctrico:



Donde suponemos que la corriente eléctrica i(t) es nula para t=0 y que el capacitor C se encuentra descargado.

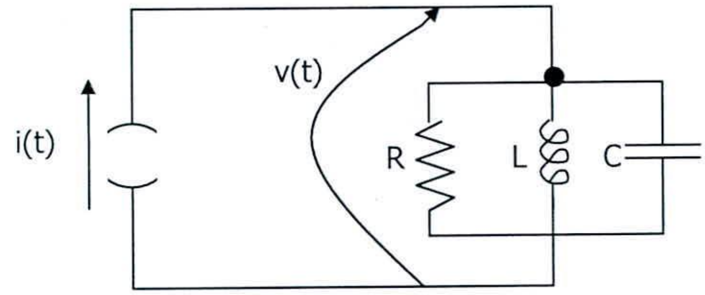
Hallar:

a) La ecuación diferencial que relaciona a la tensión v(t) con la corriente i(t).
b) La función I(s) para $v(t) = \delta(t)$.

Ejercicio n° 18:

Sea el circuito RLC paralelo alimentado por un generador de corriente:

R = 6
L = 5
C = 1/30

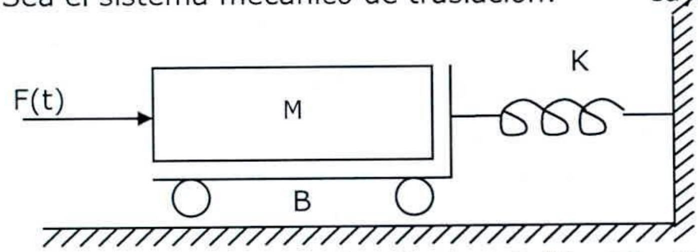


cuya E.D. es $$i(t) = \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v(t)dt + C\frac{dv(t)}{dt}$$

Halle v(t) para un impulso de corriente (aplicando Transformada de Laplace).

Ejercicio n° 19:

Sea el sistema mecánico de traslación:



cuya E.D. de movimiento es:

(Aplicando la $2^{da.}$ Ley de Newton)

$$F(t) - K\,y(t) - B\,y'(t) = M\,y''(t)$$

a) Considerar M = 1 [Kg.] , B = 5 [Kg./s] , K = 4 [N/m] y hallar la respuesta del sistema a un escalón unitario sabiendo que parte del reposo. (Resolver por Transf. de Laplace)
b) ¿Qué valor debería tener B para que el movimiento no sea amortiguado? Justifique.

PARTE 4: EJERCICIO INTEGRADOR

Ejercicio n° 20:

Dadas las transferencias: $G_1(s) = \dfrac{6}{s^2+9}$, $G_2(s) = \dfrac{2}{s^2+6s+10}$ y $G_3(s) = \dfrac{6s+20}{s^3+6s^2+10s}$.

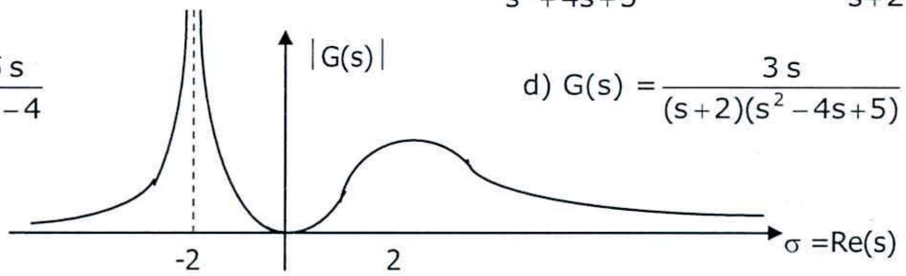
a) Indique cuál de ellas corresponde a un sistema cuya respuesta a la entrada impulso $f(t) = \delta(t)$ es oscilatoria amortiguada con valor estable 2. Justifique correctamente.

b) Considere $G(s) = k \bullet G_2(s)$. Halle el valor de $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $|G(2j)| = \sqrt{5}$.

EJERCICIOS PARA MARCAR LA RESPUESTA CORRECTA, tomados en Finales:

☑ Ejercicio n° 21:

Marcar la única respuesta correcta de cada ítem:

1.	La figura puede corresponder a: a) $G(s) = \dfrac{s}{s^2+4s+5}$ b) $G(s) = \dfrac{s}{s+2}$ c) $G(s) = \dfrac{5\,s}{s^2-4}$ d) $G(s) = \dfrac{3\,s}{(s+2)(s^2-4s+5)}$ 
2.	Si la respuesta de un sistema a la entrada E(t) = 1 es oscilatoria (no amortiguada) con valor medio 2, entonces la transferencia puede ser: a) $G(s) = \dfrac{2s^2+3s+18}{s^2+9}$ b) $G(s) = \dfrac{2}{s^3+9s}$ c) $G(s) = \dfrac{6s}{s^2+9}$ d) $G(s) = \dfrac{2}{s^2+9}$
3.	Sea $G(s) = \dfrac{s^2-4s}{s^3-4s^2+9s-36}$ entonces la respuesta del sistema a un escalón es: a) oscilatoria amortiguada b) oscilatoria de amplitud constante c) sobreamortiguada (exponencial decreciente) d) Ninguna es correcta
4.	Dada $G(s) = \dfrac{k(s^2-s-2)}{s^3-4s^2+9s-10}$ la transferencia de un sistema, el valor de $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $\lvert G(j) \rvert = \sqrt{10}$ es: a) k = 1 b) $k = \sqrt{10}$ c) k = 10 d) ninguno de los anteriores
5.	El sistema cuya transferencia es: $G(s) = \dfrac{s^2-4s-5}{s^3-3s^2-25s+75}$ es: a) marginalmente estable (de amplitud constante) b) inestable c) estable amortiguado d) ninguna de las anteriores
6.	Si la respuesta de un sistema a la entrada E(t) = 1 es oscilatoria pura con valor medio no nulo, entonces la transferencia puede ser: a) $G(s) = \dfrac{s}{s^2+6s+13}$ b) $G(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+5}$ c) $G(s) = \dfrac{s}{s^2+9}$ d) $G(s) = \dfrac{3}{s^2+4}$

7.	Dada la transferencia $G(s) = \dfrac{s^2-7s+10}{s^3-4s^2-5s}$ entonces la respuesta al impulso es: a) inestable b) oscilatoria amortiguada c) oscilatoria pura d) ninguna de las anteriores
8.	La respuesta del sistema cuya transferencia es $G(s) = \dfrac{s+1}{s^2+K\,s+5}$ a la entrada impulso $\delta(t)$ tiene factor de amortiguamiento $\alpha = 2$, entonces: a) K = 0 b) K = 2 c) K = 4 d) no existe K
9.	Sabiendo que uno de los polos de la transferencia es $G(s) = \dfrac{s+1}{s^3+K\,s^2+13\,s}$ es $p_1 = -3+2\,j$, entonces el valor de K es: a) K = 0 b) K = 3 c) K = 6 d) ninguno de las anteriores
10.	Dada la transferencia de un sistema: $G(s) = \dfrac{s^2-5s+K}{s^4-s^3-11s^2-s-12}$, el valor de $K \in \mathbb{R}$ para que el sistema sea estable es: a) k = 4 b) k = 8 c) k = 0 d) ninguno de las anteriores
11.	Si $G(s) = \dfrac{s^2+s-20}{s^3+k\,s^2-3s-52}$ es la transferencia de un sistema estable, entonces el valor de $k \in \mathbb{R}$ es: a) k = -2 b) k = 0 c) k = 2 d) ninguno de las anteriores
12.	Dada la transferencia $G(s) = \dfrac{s}{(s+1)(s^2+2)}$, el valor de $\vert G(2j) \vert$ es: a) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ d) ninguno de las anteriores
13.	La respuesta del sistema cuya transferencia es: $G(s) = \dfrac{2s+1}{s^2-4s+3}$ a una entrada f(t) = t es: a) $y(t) = \dfrac{10}{9}+\dfrac{1}{3}\bullet t+\dfrac{7}{18}\bullet e^{3t}-\dfrac{3}{2}\,e^{t}$ b) $y(t) = \dfrac{10}{9}+\dfrac{1}{3}\bullet t+\dfrac{7}{18}\bullet \cos(3t)$ c) $y(t) = \dfrac{10}{9}\bullet t+\dfrac{1}{3}\bullet t^2+\dfrac{7}{18}\bullet e^{3t}-\dfrac{3}{2}\,e^{t}$ d) ninguna de las anteriores

RESPUESTAS EJERCICIOS DE SISTEMAS ESTABLES:

☑ Ej. 1:

a) Polos: $p_1 = -1 + j$; $p_2 = -1 - j$ Ceros: $z_1 = 0$; $z_2 = \infty$

b) Polos: $p_1 = -4 + 3j$; $p_2 = -4 - 3j$ Ceros: $z_1 = 0$; $z_2 = 3$

c) Polos: $p_1 = 0$; $p_2 = -2$ Ceros: $z_1 = \infty$

d) Polos: $p_1 = -4$; $p_2 = -3 - 3j$; $p_3 = -3 + 3j$ Ceros: $z_1 = -2$; $z_2 = \infty$

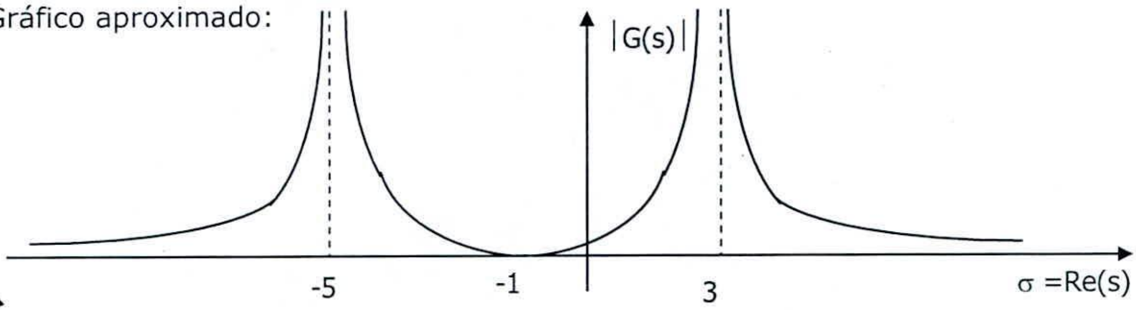
e) Polos: $p_1 = -2$; $p_2 = -3$ Ceros: $z_1 = 0$; $z_2 = \infty$

f) Polos: $p_1 = -2$ (doble) Ceros: $z_1 = 0$; $z_2 = \infty$

☑ Ej. 2: a) $k = 8$ b) polos: $p_1 = 4 + 3j$ $p_2 = 4 - 3j$ ceros: $z_1 = 5$ $z_2 = \infty$

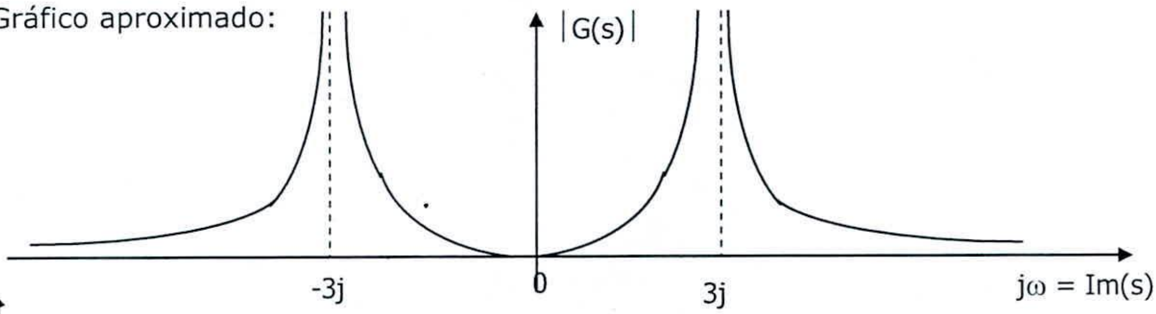
☑ Ej. 3: a) polos: $p_1=3$ $p_2=-5$ ceros: $z_1=-1$ $z_2 = \infty$ b) $k = \sqrt{130}$

c) Gráfico aproximado:



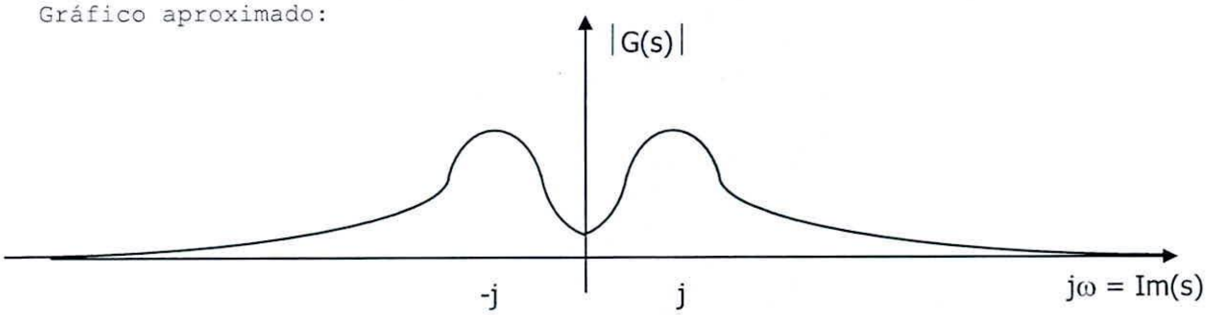
☑ Ej. 4: a) $k = 18$

b) Gráfico aproximado:



☑ Ej. 5: a) $k = -6$ b) polos: $p_1 = -1 + j$; $p_2 = -1 - j$ Ceros: $z_1 = \infty$

Gráfico aproximado:



Ej. 6:

a) $G(s) = \dfrac{k(s^2-3s)}{s^3+5s^2+9s+5} = \dfrac{k\,s(s-3)}{(s+1)(s^2+4s+5)}$ con $k \in |R$

b) $G(s) = \dfrac{\frac{13}{5}(s^2+6s+10)}{(s-1)(s^2+4s+13)}$ c) $G(s) = \dfrac{25\,(s^2+2s+2)}{s^2+4s+\frac{25}{4}}$

d) $G(s) = \dfrac{\frac{1}{5}(s+5)^2}{s^2+4s+5}$ o bien $G(s)= \dfrac{(s-a)(s+5)}{(s-a)(s^2+4s+5)}$ con $a \in |R$

e) $G(s) = \dfrac{\frac{1}{2}(s-2)}{(s+3)(s^2+2s+5)}$ f) $G(s) = \dfrac{13\,(s+4)}{s^3+2s^2+10s}$

g) $G(s) = \dfrac{8(s+2)^2}{(s+1)(s^2+8s+17)}$ h) $G(s) = \dfrac{6\,(s+1)}{(s+2)(s^2-2s+5)}$

i) $G(s) = \dfrac{5\,(s+3)}{(s+1)(s^2-4s+5)}$

Ej. 7: a) a=1 b) El otro polo es: -3-j

Ej. 8: No es estable pues tiene un polo en el semiplano derecho: p = 3. La respuesta del sistema será exponencial creciente.

Ej. 9: a) polos: $p_1=-1$ $p_2=3$ ceros: $z=-2$ b) $y(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t}$

Ej. 10:

a) polos: $p_1=0$ $p_2=-1$ ceros: $z_1=-2$ es un sistema estable.

b) $|G(-1+j)| = 3$; $\mathrm{Arg}[G(-1+j)] = -\pi$ d) $v_2(t) = 6 - 6\,e^{-t} - 3\,t\,e^{-t}$

Ej. 11:

a) no es estable b) $y(t) = \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-5t}$

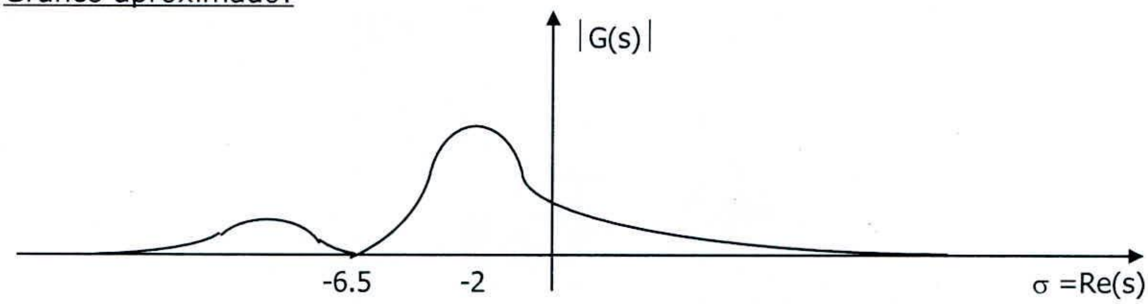
Ej. 12:

a) es estable b) $y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \mathrm{sen}(2t)$

Ej. 13: a) $G(s) = \dfrac{10\,s+65}{s^2+4s+13}$

b) polos: $p_1 = -2 + 3\,j$ $\quad p_2 = -\,2 - 3\,j$ $\quad$ ceros: $z_1 = -6.5$ $\quad z_2 = \infty$

Gráfico aproximado:

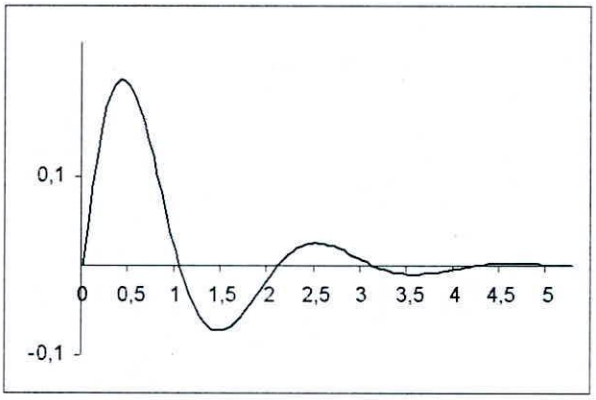


Ej. 14:

a) $M\,y''(t) + B\,y'(t) + K\,y(t) = f(t)$ $\quad$ con $y(0) = 0 \wedge y'(0) = 0$

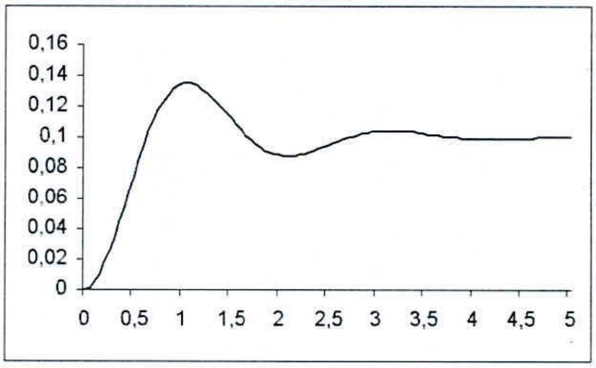
b) $Y(s) = \dfrac{1}{Ms^2+Bs+K} \bullet F(s)$

c) M=1 ; B=2 ; K=10 ; $f(t) = \delta(t)$: $y(t) = \dfrac{1}{3}\,\text{sen}(3t)\,e^{-t}$ oscilatoria amortiguada.

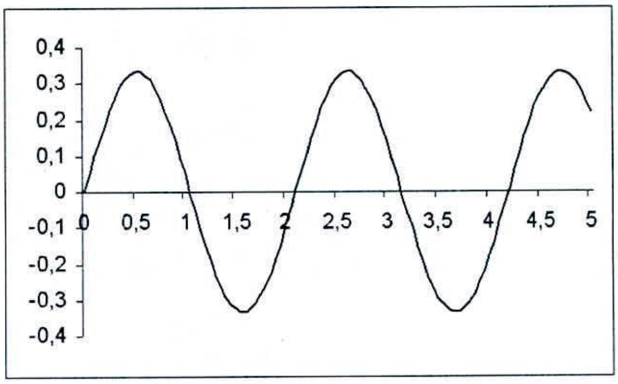


d) M=1 ; B=2 ; K=10 ; $f(t) = E(t)$: $y(t) = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{10}\,e^{-2t}\left[\,\dfrac{1}{3}\,\text{sen}(3t) + \cos(3t)\,\right]$

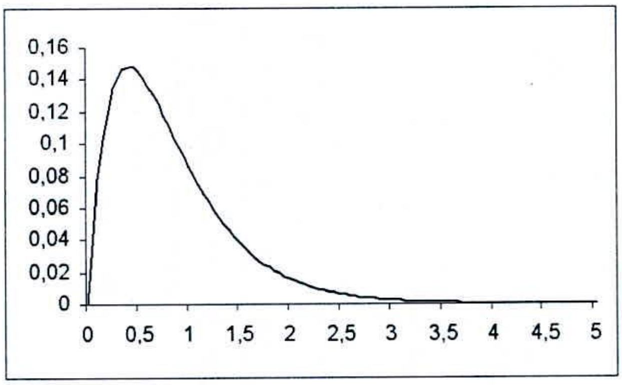
oscilatoria amortiguada más constante.



e) M=1 ; B=0 ; K=9 ; f(t) = δ(t) : $y(t) = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(3t)$ oscilatoria pura.



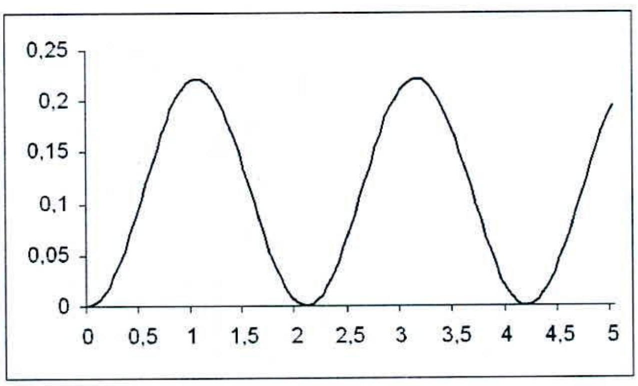
f) M=1 ; B=5 ; K=6 ; f(t) = δ(t) : $y(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$ amortiguado exponencial.



☑ Ej. 15:

a) $M\,x''(t) + K\,x(t) = f(t)$ con $x(0) = 0 \wedge x'(0) = 0$

b) $G(s) = \dfrac{1}{Ms^2 + K}$ c) $x(t) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos(3t)$



Ej. 16:

a) $m\,l\,\boldsymbol{\theta}''(t) + m\,g\,\boldsymbol{\theta}(t) = f(t)$ con $\boldsymbol{\theta}(0) = 0 \wedge \boldsymbol{\theta}'(0) = 0$

b) $\boldsymbol{\theta}(t) = \dfrac{1}{m\sqrt{gl}}\ \mathrm{sen}\left(\sqrt{\dfrac{g}{l}}\ t\right)$

Ej. 17:

a) $v(t) = R\,i(t) + L\,i'(t) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(t)\,dt$ b) $I(s) = \dfrac{C\,s}{L\,C\,s^2 + R\,C\,s + 1}$

Ej. 18: $v(t) = -60\,e^{-2t} + 90\,e^{-3t}$

Ej. 19: a) $y(t) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}\,e^{-t} + \dfrac{1}{12}\,e^{-4t}$ b) $B = 0$

Ej. 20: a) Es $G_3(s) = \dfrac{6s+20}{s^3+6s^2+10s} = \dfrac{2}{s} - \dfrac{2s+6}{(s+3)^2+1} \Rightarrow y(t) = 2 - 2\cos(t)\,e^{-3t}$

b) $k = 15$

Ej. 21:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
d	a	b	c	b	d	d	c	c	a	b	b	a

EJERCITACION

TRANSFORMADA Z

PARTE 1: TRANSFORMADA Z DIRECTA - PROPIEDADES

☑ Ejercicio n° 1:

Halle, por definición, la transformada Z de las siguientes sucesiones definidas para $n \geq 0$ e indique en cada caso la región de convergencia correspondiente:

a) $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

b) $x(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

c) $x(n) = \begin{cases} 4^n & \text{si } n \text{ es par} \\ 3^{-n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

d) $x(n) = \begin{cases} 5 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 3\,(2)^{-n} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

e) $x(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1 \\ n & \text{si } 1 < n < 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

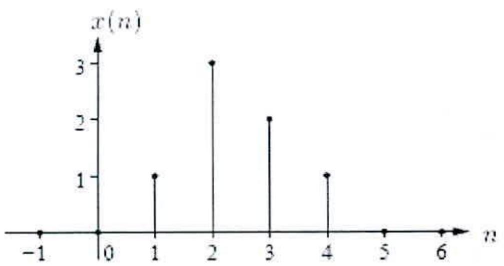
OPTATIVOS: f) $x(n) = \dfrac{1}{n+1}$ g) $x(n) = \dfrac{2^n}{n!}$

Recuerde: $\sum_{n=0}^{\infty} k\, r^n = \dfrac{K}{1-r}$ con $0 < r < 1$; $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$

$$\mathrm{Ln}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \quad \text{con } x \in (-1\,;\,1]$$

☑ Ejercicio n° 2:

Dada la siguiente secuencia finita, halle la transformada Z de la misma.



Ejercicio n° 3:

Utilizando la tabla y las propiedades, halle la transformada Z de las siguientes sucesiones:

a) $x(n) = 2^n+3\left(\frac{1}{2}\right)^n$; $n\geq 0$ b) $x(n) = u(n-2)$; $n\geq 2$ c) $x(n) = 3^{n+1}$; $n\geq 0$

Ejercicio n° 4:

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando correctamente:

a) La región de convergencia de la transformada Z de $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\forall\, n \in N$ es: $|z| > 3$

b) La transformada Z de $x(n) = \begin{cases} 4 & \text{si n es par} \\ 5^n & \text{si n es impar} \end{cases}$ es: $X(z) = \dfrac{4z^2}{z^2-1} + \dfrac{5z}{25z^2-1}$

c) Dada la secuencia $x(n) = \begin{cases} 3 & \text{si n es multiplo de 5} \\ (-2)^n & \text{si n no es multiplo de 5} \end{cases}$, la región de convergencia de su transformada Z es: $|z|>2$

PARTE 2: ANTITRANSFORMADA Z

Ejercicio n° 5:

Halle las antitransformadas Z de las siguientes funciones:

a) $X(z) = \dfrac{3z(z-3)}{z^2-5z+4}$ b) $X(z) = \dfrac{2z^2}{z^2-9}$ c) $X(z) = \dfrac{z}{z^2+z-2}$

d) $X(z) = \text{senh}(\frac{2}{z})$ e) $X(z) = z\,(e^{\frac{1}{z}}-1)$ f) $X(z) = \left(\dfrac{1}{z-1}\right)^2$

g) $X(z) = \dfrac{2z^2+z}{(z-2)^2(z-1)}$ h) $X(z) = \dfrac{-z^2+4z}{(z-2)(z-1)^2}$ i) $X(z) = \dfrac{4z^3-14z^2+10z}{(z-3)(z^2-4z+4)}$

Recuerde: $\cosh(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$;	$\text{senh}(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

PARTE 3: ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Ejercicio n° 6:

Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias de orden 1 utilizando la transformada Z:

a) $a_{n+1} - 5\,a_n = 12$ con $a_0 = -1$

b) $a_{n+1} - 2\,a_n = 2$ con $a_0 = 3$

c) $a_{n+1} - 2\,a_n = 2 \bullet 3^n$ con $a_0 = 2$

d) $a_{n+1} = 2\,a_n + 3\,n - 1$ con $a_0 = 0$

e) $a_{n+1} - 4\,a_n = 4\,(1-n)\,2^n$ con $a_0 = 3$

Ejercicio n° 7:

Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias de orden 2 utilizando la transformada Z:

a) $a_{n+2} + 3\,a_{n+1} + 2\,a_n = 3^n$ con $a_0 = 0 \wedge a_1 = 1$

b) $a_{n+2} + 4\,a_{n+1} + 4\,a_n = 7$ con $a_0 = 1 \wedge a_1 = 2$

c) $x(n+2) - 4\,x(n+1) + 3\,x(n) = -2 \wedge x(0) = 7 \wedge x(1) = 12$

d) $x(n+2) - 4\,x(n+1) + 4\,x(n) = 4 \bullet 3^n \wedge x(0) = 4 \wedge x(1) = 14$

e) $x(n+2) - 6\,x(n+1) + 9\,x(n) = 5 \bullet 2^n \wedge x(0) = 5 \wedge x(1) = 13$

f) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ con $a_0 = 0 \wedge a_1 = 1$

g) $a_{n+2} - a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ con $a_0 = 1 \wedge a_1 = 1$

Ejercicio n° 8:

Para las siguientes ecuaciones en diferencias de orden 2 escriba la X(z) y la x(n) correspondiente a cada una:

a) $x(n+2) - 6\,x(n+1) + 9\,x(n) = 100\,(-2)^n$ con $x(0) = 4 \wedge x(1) = -5$

b) $x(n+2) - 4\,x(n+1) + 4\,x(n) = 4^{n+1}$ con $x(0) = 1 \wedge x(1) = 10$

c) $a_{n+2} - 2\,a_{n+1} - 3\,a_n = 24 \bullet 3^n + 12 \bullet 5^n$ con $a_0 = 1 \wedge a_1 = 11$

EJERCICIOS PARA MARCAR LA RESPUESTA CORRECTA, tomados en Finales:

☑ Ejercicio n° 9:

Marcar la única respuesta correcta de cada ítem:

1.	La transformada Z de: $x(n) = \begin{cases} 0 & \text{si n es par} \\ 2\,(-3)^{-n} & \text{si n es impar} \end{cases}$ es: a) $X(z) = \dfrac{-6z}{9z^2-1}$ b) $X(z) = \dfrac{2\,z}{z+3}$ c) $X(z) = \dfrac{2\,z}{z^2+9}$ d) n.a.
2.	La transformada Z de $x(n) = \begin{cases} 0 & \text{si n es par} \\ 3 \bullet 2^n & \text{si n es impar} \end{cases}$ es: a) $X(z) = \dfrac{3\,z}{z-2}$ b) $X(z) = \dfrac{3\,z}{z^2-4}$ c) $X(z) = \dfrac{3\,z^2}{z^2-4}$ d) $X(z) = \dfrac{6\,z}{z^2-4}$ e) n.a.
3.	Sea $x(n) = n$ para $0 \le n \le 3$ $\wedge$ $x(n) = 0$ para $n \ge 4$, entonces su transformada Z es: a) $Z[x(n)] = \dfrac{z}{(z-1)^2}$ b) $Z[x(n)] = \dfrac{z+2z+3z}{(z-3)^2}$ c) $Z[x(n)] = \dfrac{z^2+2z+3}{z^3}$ d) n.a.
4.	Sean las sucesiones a_n y b_n entonces se cumple: a) $Z[a_n \bullet b_n] = Z[a_n] \bullet Z[b_n]$ b) $Z[a_n{}^2] = Z[a_n]^2$ c) $Z[a_n - k\,b_n] = Z[a_n] - k\,Z[b_n]$ d) $Z[a_{n+1}] = z\,Z[a_n] - a_0$ e) n.a.
5.	La antitransformada Z de $X(z) = \dfrac{z(2z+3)}{z^2-7z+6}$ es: a) $x(n) = 3\,(-6)^n + 1$ b) $x(n) = -3\,(-6)^n + (-1)^n$ c) $x(n) = 3 \bullet 6^n - 1$ d) n.a.
6.	La antitransformada Z de $X(z) = \dfrac{12\,z}{z^2-9}$ es: a) $x(n) = 12 \cdot 3^n$ b) $x(n) = 12\,[(3)^2]^n$ c) $x(n) = 12 \cdot (-3)^n + 12 \cdot 3^n$ d) $x(n) = 4 \cdot 3^n$ si n es impar e) n.a.

RESPUESTAS EJERCICIOS DE TRANSFORMADA Z:

Ej. 1:

a) $X(z) = \dfrac{z}{z-\frac{1}{3}}$ $|z| > \dfrac{1}{3}$

b) $X(z) = \dfrac{z^2}{z^2-1}$; $|z|>1$

c) $X(z) = \dfrac{z^2}{z^2-16} + \dfrac{3z}{9z^2-1}$; $|z|>4$

d) $X(z) = \dfrac{5z}{z^2-1} + \dfrac{12\,z^2}{4z^2-1}$; $|z|>1$

e) $X(z) = \dfrac{2z^2+2z+3}{z^3}$; $z \neq 0$

f) $X(z) = z\ln\left(1-\dfrac{1}{z}\right)$; $|z|>1$

g) $X(z) = e^{\frac{2}{z}}$; $z \neq 0$

Ej. 2:

$$X(z) = \frac{z^3+3z^2+2z+1}{z^4}$$

Ej. 3:

a) $X(z) = \dfrac{8z^2-13z}{(z-2)(2z-1)}$; $|z|>2$

b) $X(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$

c) $X(z) = \dfrac{3z}{z-3}$

Ej. 4:

a) FALSO. Es $|z| > 1/3$.

b) VERDADERO.

c) VERDADERO.

Ej. 5:

a) $x(n) = 2 + 4^n$

b) $x(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 2\,3^n & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

c) $x(n) = \left(-\dfrac{1}{3}\right)(-2)^n + \dfrac{1}{3}$

d) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{2^n}{n!} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

e) $a_n = \dfrac{1}{(n+1)!}$

f) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \text{ o } n=1 \\ n-1 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

g) $x(n) = -3 \bullet 2^n + 2.5\,n\,2^n + 3$

h) $x(n) = 2 \bullet 2^n - 2 - 3\,n$

i) $x(n) = x(n) = 4\,3^n + n\,2^n$

☑ Ej. 6:

a) $a_n = -3 + 2 \bullet 5^n$ b) $a_n = -2 + 5 \bullet 2^n$ c) $a_n = 2 \bullet 3^n$

d) $a_n = 2 \bullet 2^n - 2 - 3\,n$ e) $a_n = 2\,n\,2^n + 3\,4^n$

☑ Ej. 7:

a) $a_n = \frac{3}{4}(-1)^n - \frac{4}{5}(-2)^n + \frac{1}{20}3^n$ b) $a_n = \frac{2}{9}(-2)^n - \frac{5}{6}n\,(-2)^n + \frac{7}{9}$

c) $x(n) = 2 \bullet 3^n + 5 + n$ d) $x(n) = 4 \bullet 3^n + n \bullet 2^n$ e) $x(n) = 5 \bullet 2^n + n \bullet 3^n$

f) $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ g) $a_n = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}(-1)^n - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{2})$

☑ Ej. 8:

a) $X(z) = \frac{z\,(4z^2 - 21z + 42)}{(z+2)(z-3)^2} = \frac{4z}{z+2} + \frac{3z}{(z-3)^2} \Rightarrow x(n) = 4\,(-2)^n + n\,3^n$

b) $X(z) = \frac{z^3 + 2z^2 - 20z}{(z-2)^2(z-4)} \Rightarrow x(n) = 3 \bullet n \bullet 2^n + 4^n$

c) $X(s) = \frac{z(z^2 - 21)}{(z-3)^2(z-5)} = \frac{6z}{(z-3)^2} + \frac{z}{(z-5)} \Rightarrow x(n) = 2\,n\,3^n + 5^n$

☑ Ej. 9:

1	2	3	4	5	6
a	d	c	c	c	d